

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное агентство по образованию

ГОУ ВПО

Российский государственный гидрометеорологический университет

(РГГМУ)

«Допущена к защите»

Кафедра экспериментальной

Зав. кафедрой доктор физ.-мат.наук,

физики атмосферы

профессор А.Д.Кузнецов

ДИПЛОМНЫЙ ПРОЕКТ

Моделирование параметров кристаллов льда

Выполнила: Д.А. Николаева
гр. М-534

Руководитель: доцент, канд. физ.–мат. наук
В. В. Чукин

Санкт-Петербург 2008

Содержание

	Стр.
Введение	3
1 Кристаллы льда	5
1.1 История изучения кристаллов льда	5
1.2 Классификация форм кристаллов льда	8
2 Условия формирования кристаллов льда в облаках	20
2.1 Образование снежных кристаллов	20
2.1. Льдообразование в атмосфере	
1	20
2.1. Рост кристаллов в результате осаждения водяного пара	
2	22
2.1. Коагуляция за счет столкновения кристалла с облачными	
3 каплями	23
2.1. Коагуляция за счет столкновения снежных кристаллов	
4	24
2.2 Связь между формой ледяных кристаллов и температурно- влажностными характеристиками	25
2.3 Причины многообразия снежных кристаллов	31
2.4 Микрофизические характеристики снежных кристаллов	33
3 Математический аппарат фрактальной геометрии	51
3.1 История появления фракталов	51
3.2 Размерность фракталов	53
3.3 Типы фракталов	54
4 Моделирование размеров и структуры кристаллов льда	67
4.1 Численное моделирование эволюции во времени размеров кристаллов льда	67
4.2 Моделирование структуры кристаллов льда	74
Заключение	81
Список используемых источников	83

Введение

Каждый человек, который хотя бы раз гулял под снегопадом, ловил снежинки и, разглядывая их, задумывался, почему же они все разной и такой

удивительно красивой формы. Вырезая новогодние снежинки из бумаги, каждый создает свою снежинку, неповторимой формы, так и природа создает тысячи кристаллов льда, непохожих друг на друга.

Сотни лет назад ученый Иоганн Кеплер заинтересовался причудливой формой кристалла и начал их исследования. Из столетия в столетия ученые так же заметившие разнообразие форм снежинок, продолжали наблюдения и пополняли новыми сведениями знания о многообразии формы ледяных частиц.

Актуальность работы определяется интересом к изучению процесса образования кристаллов льда в атмосфере, обладающих чрезвычайно богатым разнообразием и красотой. Практическая значимость данного исследования заключается в возможности использования разрабатываемых алгоритмов для поиска ответов на многие вопросы, связанные с разнообразием форм кристаллов.

Целью данной работы является моделирование параметров кристаллов льда.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- изучить классификацию кристаллов льда;
- рассмотреть условия формирования кристаллов в облаках и параметры, влияющие на форму;
- изучить методы фрактальной геометрии;
- осуществить численное моделирование размеров и структуры кристаллов льда.

В первой главе описана история изучения кристаллов льда и приведены классификации форм кристаллов льда предложенные разными авторами на протяжении столетий.

Во второй главе рассмотрены условия формирования кристаллов льда. Представлены диаграммы зависимости формы кристаллов от температуры

воздуха и пересыщения водяного пара. Рассмотрена зависимость геометрических параметров, описывающих форму кристаллов. Представлена связь между скоростью падения и линейными размерами.

В третьей главе приводятся сведения о методах фрактальной геометрии, дается определение фрактала, рассматриваются типы фракталов и приводятся их примеры.

В четвертой главе представлены результаты численного моделирования размеров и структуры кристаллов льда.

Дипломная работа состоит из 83 страниц, введения, четырех глав, заключения, 32 рисунков, 10 таблиц, списка 6 используемых источников.

1 Кристаллы льда

1.1 История изучения кристаллов льда

Вряд ли найдется на Земле человек, который хоть раз видел снег, но не разглядывал с удивлением маленькую снежинку, восхищаясь ее совершенной формой. Ученые же не только восхищаются красотой и совершенством, они ищут законы этого совершенства. Трудно сказать, кто был первым исследователем снега. Но считается, что в 1550 году архиепископ Олаф Магнус из шведского города Упсала первым наблюдал снежинки невооруженным глазом. Его рисунки свидетельствуют о том, что он не заметил их шестиконечной симметрии.

Впервые на прекрасные снежинки как на кристаллы строгой формы обратил внимание ученый Иоганн Кеплер. Представьте себе... Средневековый немецкий городок. Зимний день 1611 года, кружит и падает мягкий снег. Из дома выходит немолодой мужчина. Он идет своей дорогой, но вдруг останавливается и всматривается в снег, разглядывая маленькие частички — снежинки, ледяные кристаллики. Он, как ребенок, радуется снегу, но глаза его серьезны, взгляд пытлив и внимателен. Ведь он же — ученый, знающий об этом мире так много, но не знающий ответа на совсем простой вопрос: почему все снежинки имеют одну очень странную особенность — они все шестиугольной формы. «Я прилежно принялся разглядывать снежинки. Все они были с прямыми лучами, но двух видов. Одни снежинки были очень маленькими, с различным числом торчащих кругом лучей, голых, лишенных опушки и полосочек и очень тонких. В центре лучи сходились к шарикю несколько большей величины. Таких снежинок было больше всего. Среди них были разбросаны гораздо более редкие снежинки второго вида — шестиугольные звездочки, ни одна из них, ни пока она падала, ни после того, как опускалась на землю, не напоминала по форме другую». О своих наблюдениях и выводах он рассказал в 1611 году в трактате «О шестиугольных снежинках». Это блестящее исследование, написано в полушутливой форме письма к Иоганну Вакенфельсу, советнику императора Рудольфа II.

В 1635 году формой снежинок заинтересовался французский философ, математик и естествоиспытатель Рене Декарт и написал этюд, включенный им впоследствии в «Опыт о метеорах». Наблюдениями своими он был так доволен, что выражал желание, чтобы и другие «нужные для подтверждения его теории опыты точно так же падали с облаков и чтобы нужно было иметь только глаза, чтобы их видеть». Современные специалисты удивлены тем, что на его рисунках встречается редкий тип, представляющий шестигранный кристалл, на двух концах которого – шестигранные пластинки. С изобретением микроскопа в середине 17 века представления о формах снежинок расширилось.

В 1665 году английский естествоиспытатель Роберт Гук издал большой труд под заглавием «Micrographia», который содержал эскизы практически всех форм кристаллов, которые он смог увидеть с помощью только что изобретенного микроскопа. Работы Гука впервые показали сложность, и запутанность симметрии кристаллов снега.

В историю исследования снежинок внесли свою лепту и японцы. Феодалный правитель Страны восходящего солнца Тосицура Онаками Дои с присущим японцам чувством точности и хрупкости красоты составил 97 рисунков «снежных цветков». Сделанные в 1839 году, они с полным правом считаются самыми точными изображениями снежинок до открытия микрофотографии.

Но особенно формами снежинок учёные заинтересовались благодаря Уилсону Бентли – фермеру из американского штата Вермонт. Он родился в 1865 году и в пятнадцатилетнем возрасте получил в подарок от матери микроскоп. На улице мальчик рассматривал снежинки, которые поразили его разнообразием и красотой форм. На протяжении трех зим он пытался зарисовать снежные кристаллики, но они были слишком сложны и быстро таяли. Фотоаппарат, прикрепленный к микроскопу, разрешил эту трудность, и целых полвека Бентли фотографировал снежинки, делая до 300 снимков за

зиму. «Под микроскопом я обнаружил, что снежинки — это чудесное воплощение красоты; и мне показалось стыдным, что эту красоту не увидят и не оценят другие. Каждый кристалл был образцом великолепного узора, и ни один узор не повторялся дважды. Когда снежинка таяла, узор пропадал навсегда. Так, как будто навсегда уходила красота, не оставив после себя никакого следа» - писал Бентли. В 1898 году в журнале «Харперс мэгэзин» он опубликовал статью о снежных кристаллах, и с тех пор слава о нем разнеслась по всему миру. К концу жизни Бентли коллекция насчитывала более 5000 экземпляров. На основе его работ было доказано, что не существует ни одной пары абсолютно одинаковых снежинок. До сих пор коллекцией Бентли пользуются ученые, художники и дизайнеры. В родном городе Бентли Джерико работает созданный заботливыми руками музей. Здесь хранятся оригинальные работы Уилсона Бентли, а так же архив, который включает более 60 статей, в которых фотограф размышляет о форме и свойствах снежинок, рассказывает о своем опыте их фотографирования, что является и сейчас непростой задачей.

Еще одним человеком, чье внимание привлекли снежинки, был Укисиро Накая. Он был первым, кто сделал систематическое изучение кристаллов снега. Будучи ядерным физиком, в 1932 году Накая был назначен на должность профессора в Хоккайдо, где не было никаких условий и средств для ядерных исследований. Неутомимый ученый заинтересовался кристаллами снега, проделал ряд превосходных детальных наблюдений всех типов снежных осадков, предложил их классификацию. В отличие от Бентли, Накая фотографировал не только самые красивые и симметричные кристаллы, но и необычные. Основная часть работ Накая была издана в 1954 году в виде красивой книги с названием «Кристаллы Снега: Естественные и Искусственные».

В 2001 году свои исследования в области снега начал профессор физики, астроном Кеннет Либбрехт из Калифорнийского технологического

института. Лаборатория профессора Либбрехта знаменита тем, что в ней снежинки не только изучаются всесторонне, но и выращиваются искусственно [6].

1.2 Классификация форм кристаллов льда

Форма ледяного кристалла при его зарождении в облаке существенно зависит от тех же характеристик, которые определяют его рост, а именно – от температуры и влажности воздуха. Выпадающий на землю снежный кристалл подвергается воздействию многих процессов, в результате чего физические характеристики сильно изменяются.

Было предложено несколько классификаций частиц льда в атмосфере, основанных на различиях в форме и процессах роста кристаллов. В некоторых случаях незначительное изменение формы кристаллов может отражать существенное изменение атмосферных условий. Одна из систем, которой часто пользуются для классификации снежных осадков, была предложена Комиссией снега и льда Международной ассоциации гидрологических наук в 1951 г. Согласно этой системе, существует семь основных видов кристаллов: гексагональные пластинки, звездчатые дендриты, гексагональные столбики, иглы, пространственные дендриты, столбцы с наконечником (запонки) и неправильной формы:

- Гексагональные пластинки – множество ледяных ребер как будто делят лопасти снежинок на сектора. Это плоские, тонкие осколки льда.
- Звездчатые дендриты – кристаллы, имеющие древовидную, ветвящуюся структуру. Они имеют шесть симметричных основных веток и множество расположенных в произвольном порядке ответвлений. Обычно такие кристаллы достигают 5 мм и более в диаметре, но, как правило, они плоские и тонкие – всего 0.1 мм.

- Гексагональные столбики. Хотя плоские, пластинчатые снежинки больше притягивают взгляд, тем не менее, самой распространенной формой снежных кристаллов является столбик или колонна. Такие полые столбики могут быть шестигранными, в виде карандаша, заостренные на концах.
- Иглы – столбчатые кристаллы могут вырастать такими длинными и тонкими, что становятся похожими на иголки. Иногда внутри них сохраняются полости, а иногда концы расщепляются на несколько веточек.
- Пространственные дендриты. Очень интересные конфигурации получаются, когда плоские или столбчатые кристаллики срастаются или спрессовываются, образуя объемные структуры, где каждая веточка расположена в своей плоскости.
- Столбики с наконечниками (запонки). Изначально такие кристаллы имеют столбчатую форму, но в результате некоторых процессов меняют направление роста, превращаясь в пластинки. Такое может произойти, если, например, кристалл заносит ветром в зону с другой температурой.
- Кристаллы неправильной формы. На долю снежинки может выпасть немало приключений, она может попасть в зону турбулентности и потерять в ней некоторые из своих веточек или разломаться совсем. Обычно таких “покалеченных” снежинок много в сыром снеге, то есть при относительно высокой температуре, особенно при сильном ветре.
- Покрытые инеем кристаллы. Кристаллы растут в толще облаков, состоящих из мельчайших водяных капель. Примерзая к снежным кристаллам, эти капельки образуют на них слой инея, иногда весьма толстый, так что образуются мелкие градины или ледяная крупа.

В последствие к ним добавились еще три вида обледеневших осадков: мелкая снежная крупка, ледяная крупка и град. Внешний вид кристаллов согласно международной классификации представлен на рисунке 1.1.

К сожалению, эта классификационная схема дает только общее подразделение снежных кристаллов – их неправильные формы идентифицировать очень трудно; кроме того, она имеет ряд недостатков. В связи с этим в физике облаков широко используется другая, более точная классификация, разработанная Магоно и Ли [4], которая содержит достаточно деталей, чтобы описать почти все типы кристаллов. Каждый тип из вышеперечисленных подразделяется на несколько видов, которые в свою очередь делятся на разновидности. Всего отмечается около 80 разновидностей облачных кристаллов и частиц осадков, представленных в таблице 1.1.

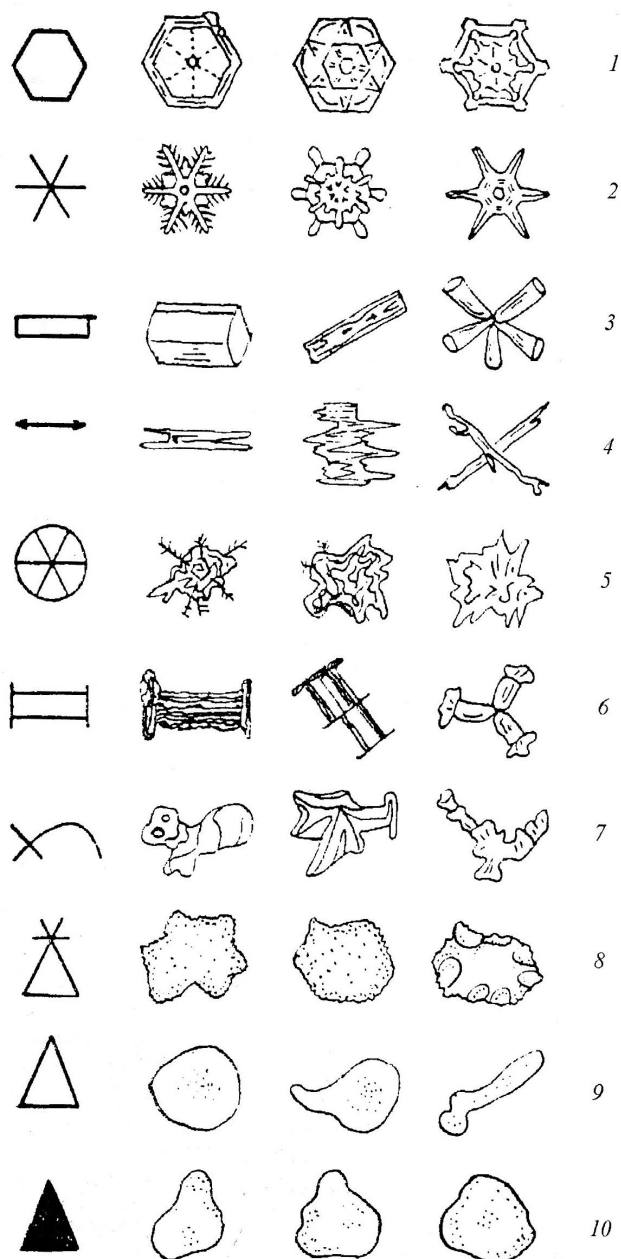


Рисунок 1.1 – Международная классификация форм ледяных кристаллов и гидрометеоров: 1 – гексагональные пластинка; 2 – звездочки, плоские дендриты; 3 – гексагональные столбики (включая пучки столбиков); 4 – иглы; 5 – пространственные дендриты; 6 – запонки; 7 – кристаллы неправильной формы; 8 – крупа; 9 – мокрые снежинки; 10 – градины.

Таблица 1.1 – Классификация естественных снежных кристаллов Магоно и Ли

Тип кристаллов	Вид кристаллов	Разновидность
N. Иглы	1. Ледяные иглы	a. Простая игла b. Игольчатая батарея c. Пустотелый столбик d. Батарея пустотелых столбиков e. Сплошной длинный столбик
	2. Игольчатые ежи	a. Игольчатый еж b. Еж из пустотелых столбиков c. Еж из длинных столбиков
C. Столбчатые кристаллы	1. Простые столбики	a. Пирамида b. Чаша c. Сплошные пули d. Пустотелые пули e. Сплошные столбики f. Пустотелые столбики g. Сплошные толстые пластинки h. Толстые пластинки с внутренней структурой i. Завитки
	2. Столбчатые ежи	a. Ежи из пуль b. Ежи из призм
CP. Комбинация из столбчатых и пластинчатых кристаллов	1. Столбики с пластинчатыми кристаллами на обоих концах (запонки)	a. Столбики с пластинками b. Столбики с дендритами на концах c. Полиструктурная запонка
	2. Пули с плоскими кристаллами на конце	a. Пули с пластинками b. Пули с дендритами
	3. Плоские кристаллы с пространственными ответвлениями	a. Звезды с иглами b. Звезды со столбиками c. Звезды с завитками на концах

Продолжение таблицы 1.1

Тип кристаллов	Вид кристаллов	Разновидность
Р. Пластинчатые кристаллы	1. Пластинчатые правильные кристаллы	<ul style="list-style-type: none"> a. Шестигранные пластинки b. Кристаллы с секторными лучами c. Кристаллы с широкими лучами d. Игольчатые звезды e. Плоские дендриты f. Папоротникообразные звезды g. Пластинчатая батарея h. Звездная батарея
	2. Пластинчатые кристаллы с осложнениями за счет других форм	<ul style="list-style-type: none"> a. Звезды с пластинками на концах b. Звезды с секторами на концах c. Дендриты с пластинками на концах d. Дендриты с секторами на концах e. Пластинки с простыми лучами f. Пластинки с секторными лучами g. Пластинки с дендритными лучами
	3. Кристаллы с нетипичным числом лучей	<ul style="list-style-type: none"> a. Двухлучевые кристаллы b. Трехлучевые кристаллы c. Четырехлучевые кристаллы
	4. Звезды с четырьмя лучами	<ul style="list-style-type: none"> a. 12-лучевые звезды с широкими лучами b. 12-лучевые дендриты
	5. Бесформенные кристаллы	Множество различных форм
	6. Пластинчатые кристаллы с ответвлениями	<ul style="list-style-type: none"> a. Пластинки с плоскими ответвлениями b. Пластинки с дендритными ответвлениями c. Звезды с пластинчатыми ответвлениями d. Звезды с дендритными ответвлениями
	7. Пространственные ежи из пластинчатых кристаллов	<ul style="list-style-type: none"> a. Ежи из пластинок b. Ежи из дендритов

Окончание таблицы 1.1

Тип кристаллов	Вид кристаллов	Разновидность
S. Столбчатые кристаллы с боковыми пластинками	<ol style="list-style-type: none"> 1. Кристаллы с боковыми пластинками 2. Ступенчатые кристаллы 3. Ежи из пуль, столбиков и пластинчатых кристаллов 	
R. Обзерненные кристаллы	<ol style="list-style-type: none"> 1. Слабообзерненные кристаллы 2. Сильнообзерненные кристаллы 3. Круповидные кристаллы 4. Крупа 	<ol style="list-style-type: none"> a. Слабообзерненные иглы b. Слабообзерненные столбики c. Слабообзерненные пластинки или сектора d. Слабообзерненные звезды a. Сильнообзерненные пластинки и сектора b. Сильнообзерненные звезды c. Звезды с обзерненными пространственными лучами a. Круповидные кристаллы гексагональной формы b. Круповидные комочки c. Круповидные кристаллы с необзерненными ответвлениями a. Гексагональная крупинка b. Крупинка неправильной формы c. Коническая крупинка
I. Кристаллы неправильной формы	<ol style="list-style-type: none"> 1. Ледяные частицы 2. Обзерненные частицы 3. Обломки кристаллов 4. Смешанные формы 	<ol style="list-style-type: none"> a. Обломки лучей b. Обзерненные обломки

Данный способ обозначения форм снежных кристаллов обладает большой наглядностью и позволяет в случае обнаружения кристалла нового вида дополнять существующую классификацию, не изменяя ее общего вида. Приведенные в таблице 1.2 [6] схематические изображения кристаллов наглядны и обладают высокой информативностью. Поэтому они наряду с фотографиями позволяют составить достаточно полное представление о форме кристалла.

Таблица 1.2 – Обозначения кристаллов в соответствии с классификацией, представленной в таблице 1.1

	N1a		C1f		P2b		P6b		CP3d		R3c
	N1b		C1g		P2c		P6c		S1		R4a
	N1c		C1h		P2d		P6d		S2		R4b
	N1d		C1i		P2e		P7a		S3		R4c
	N1e		C2a		P2f		P7b		R1a		I1
	N2a		C2b		P2g		CP1a		R1b		I2
	N2b		P1a		P3a		CP1b		R1c		I3a
	N2c		P1b		P3b		CP1c		R1d		I3b
	C1a		P1c		P3c		CP2a		R2a		I4
	C1b		P1d		P4a		CP2b		R2b		G1
	C1c		P1e		P4b		CP3a		R2c		G2
	C1d		P1f		P5		CP3b		R3a		G3
	C1e		P2a		P6a		CP3c		R3b		G4
											G5
											G6

Однако представленная в таблицах 1.1 и 1.2 классификация является достаточно сложной, поэтому при решении практических задач используются более простые классификации. Например, при исследовании оптических свойств кристаллических облаков используют подразделение

облачных кристаллов на столбчатые, пластинчатые и кристаллы объемной формы. Оно позволяет аппроксимировать кристаллы телами простых геометрических форм: цилиндрами, призмами и пластинками. При определении массы и скорости падения снежинок столбчатых и пластинчатых форм и крупы специалистами ГГО была составлена и использована классификация, представленная на рисунках 1.2 и 1.3 [4].

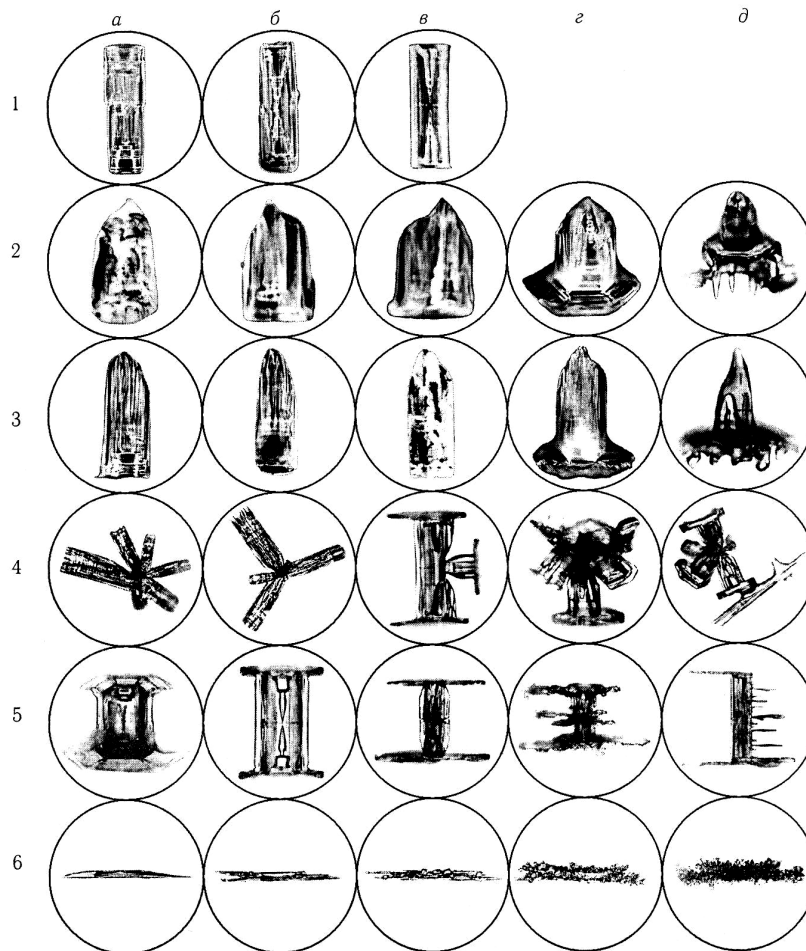


Рисунок 1.2 – Классификация снежинок столбчатых форм, используемая при определении их массы и скорости падения

В качестве характеристики кристаллов столбчатых форм принята величина K – отношение длины кристалла к его ширине. На рисунке 1.2 используются следующие обозначения: 1 *а* – столбики со значениями $K \leq 2$; 1 *б*, *в* – столбики со значениями $K > 2$; 2 *а*, *б* – пули со значениями $K \leq 2$; 2 *в* –

пули с небольшими пластинками на основаниях и значениями $K \leq 2$; 2 г – пули с небольшими пластинками на основаниях; 2 д – пули с пластинками, на нижней поверхности которых имеются ледяные отложения сублимационного характера; 3 а, б – пули со значениями $K > 2$; 3 в – пули с небольшими пластинками на основаниях и значениями $K > 2$; 3 г – пули с небольшими пластинками на основаниях; 3 д – пули с пластинками, на нижней поверхности которых имеются ледяные отложения сублимационного характера; 4 а, б – ежи простые; 4 в, г, д – ежи, на основаниях пуль которых имеются пластинки; 5 а, б, в – запонки-столбики, на обоих концах которых имеются различного вида пластинки; 5 г, д – сложные запонки; 6 а, б – прозрачные иглы; 6 в – иглы, на некоторых частях поверхности которых имеются ледяные образования сублимационного характера; 6 г – иглы, по всей поверхности которых наблюдаются ледяные отложения сублимационного характера в виде столбиков; 6 д – иглы обзерненные.

На рисунке 1.3 используются следующие обозначения: 1 а, б – тонкие пластинки гексагональной формы с ярко выраженной внутренней структурой; 1 в, г, д – толстые пластинки – объемные гексагональные пластинки; 2 а, б, в, г, д – пластинчатые звездочки со слабо развитыми неразветвленными лучами; 3 а – дендритные звездочки с развитыми неразветвленными лучами, идущими из центра; 3 б, в, г, д – дендритные звездочки с развитыми слаборазветвленными и заканчивающимися пластинками лучами; 4 а, б – звездочки с игольчатыми лучами; 4 в – дендритные звездочки с развитыми неразветвленными лучами, идущими из центра; 4 г, д – дендритные звездочки с развитыми разветвленными лучами, идущими из центра; 5 а – сильнообзерненные гексагональные пластинки; 5 б, в – сильнообзерненные пластинчатые звездочки; 5 г – сильнообзерненные звездочки развитыми неразветвленными лучами; 5 д – сильнообзерненные с развитыми разветвленными лучами; 6 а, б, в, г, д –

толстые гексагональные пластинки, на одной стороне которых имеются ледяные наросты сублимационного характера [4].

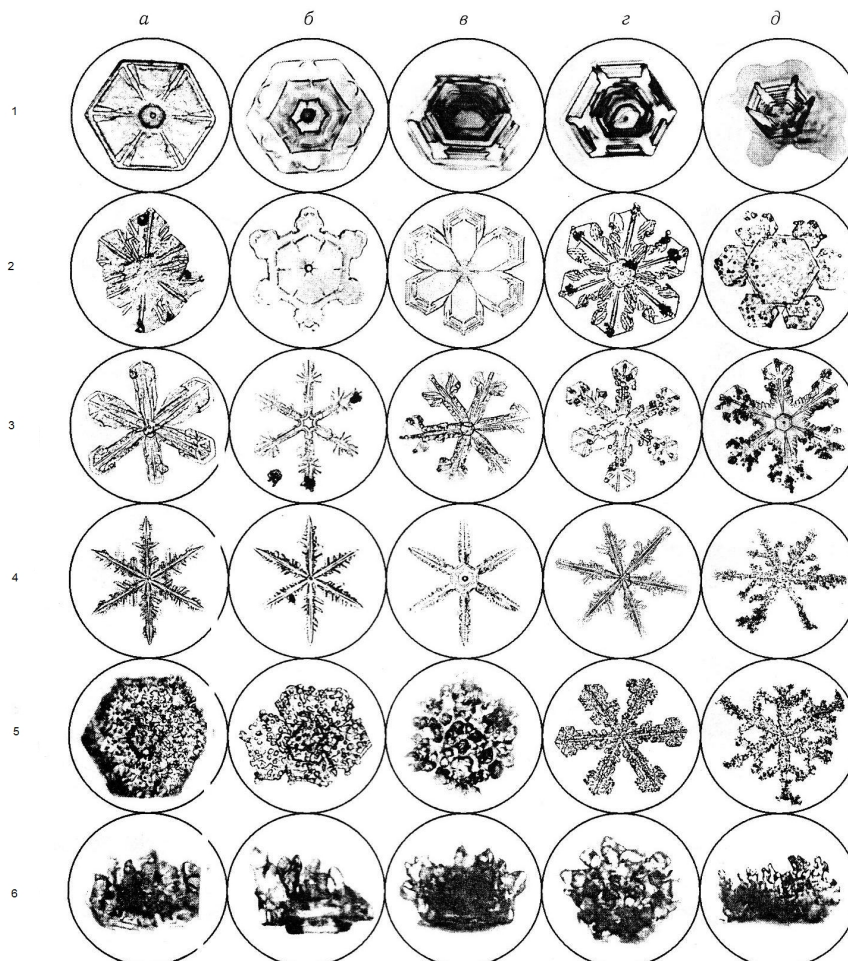


Рисунок 1.3 – Классификация снежинок пластинчатых форм и крупы, используемая при определении их массы и скорости падения

Указанные выше формы снежинок не исчерпывают всего разнообразия встречающихся в природе снежных кристаллов. Иногда наблюдаются формы, которые трудно объяснить, исходя из обычных представлений о кристаллической форме льда. К ним относятся так называемые цветы-маргаритки, то есть плоские образования, состоящие из отдельных овальных

лепестков, соединенных концами вместе, кристаллы в форме буквы "Т" и другие.

Отметим также, что многие исследователи, которые фотографировали снежинки и составляли их каталоги, стремились включать только кристаллы почти правильной формы, тогда как в естественных условиях большинство из них имеют неправильную форму, часто ассиметричны и форма их искажена за счет обзернения и т.п.

Подводя итог первой главы можно отметить, что история наблюдений за кристаллами льда насчитывает более 450 лет и за это время накоплен большой опыт, который систематизирован в ряде классификаций кристаллов. Тем не менее не существует единой классификации, описывающей всё многообразие форм кристаллов. Это объясняется различием в выборе признаков классификации, в зависимости от решаемых задач.

2 Условия формирования кристаллов льда в облаках

2.1 Образование снежных кристаллов

Формирование снежных осадков в атмосфере зависит от многих факторов, но главным образом от температуры окружающей среды и наличия переохлажденной воды. Первоначально в результате конденсации водяных паров в восходящей теплой воздушной массе формируется облако. Как только температура в облаке опускается ниже 0 °С, создаются условия, благоприятные для образования снега. При температуре около -5 °С ядра кристаллизации, присутствующие в атмосфере, формируют в процессе льдообразования мельчайшие кристаллы льда. С ледяного кристалла начинается формирование снежного кристалла (снежинки). Диаметр его обычно меньше 75 мкм, а скорость падения не превышает 5 см/с. Форма кристалла очень простая: обычно это шестиугольная пластинка, которая в процессе роста и усложнения превращается в снежинку. Нередко в результате сцепления снежинок образуются снежные хлопья. В некоторых случаях снежинка проходит через зону более высокой концентрации облачных капель, и если ее размеры превышают 300 мкм, наблюдается процесс заиневения, когда мелкие облачные капли размером 10-40 мкм замерзают при соприкосновении со снежинкой. Этот процесс, происходящий, как правило, при температурах от -5 до -20 °С, приводит к образованию инея, а в случае чрезвычайно сильного заиневения – к образованию снежной крупы.

2.1.1 Льдообразование в атмосфере

В 1 см³ воздуха в нижних слоях атмосферы в любой момент времени содержится от нескольких сотен до многих тысяч аэрозольных частиц,

большая часть которых имеет размеры от 0.01 до 1 мкм. Частицы, на которых конденсируется водяной пар, называются ядрами конденсации. Ядрами кристаллизации называют частицы, вокруг которых образуется лед в процессе непосредственного замерзания облачных капель. Процесс кристаллизации при участии таких частиц называется гетерогенным. При температуре ниже $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ процесс образования мельчайших ледяных частиц происходит спонтанно, в отсутствие ядер кристаллизации; такой процесс называется гомогенным.

В атмосфере обычно происходит гетерогенная кристаллизация. При этом, если ядро кристаллизации расположено в облачной капле, то капля замерзнет при некоторой отрицательной температуре, которая определяется природой ядра. В этом случае ядро действует как иммерсионный центр кристаллизации. Если ядро касается внешней поверхности капли и вызывает ее замерзание, оно действует как контактный центр кристаллизации. Кроме того, в переохлажденном облаке возможно осаждение водяного пара непосредственно на поверхности частицы и образование в результате ледяного слоя.

Установлено, что химический состав ядер кристаллизации чрезвычайно разнообразен; каждое из них характеризуется своей температурой, при которой может начаться образование льда. Наиболее эффективны ядра, действующие при температурах от -5 до $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Основным источником ядер кристаллизации являются частицы почв и минеральной пыли, переносимые на высоты воздушными потоками. К наиболее активным естественным ядрам кристаллизации относятся глинистые частицы; менее важными источниками являются промышленные предприятия и лесные пожары. В качестве ядер кристаллизации также могут служить частицы взвешенного происхождения, пыльца и споры растений. Лишь небольшая часть аэрозолей (при температуре $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ примерно одна частица на миллиард) может служить в качестве активных ядер

кристаллизации. Наиболее вероятные размеры ядер кристаллизации колеблются в пределах от 0.1 до 1 мкм. Концентрация активных ядер быстро возрастает с понижением температуры воздуха. Например, в диапазоне от -10 до -30 °С она возрастает в 10 раз при понижении температуры на 4 °С. Концентрация ядер также очень сильно меняется во времени и в пространстве: ее изменение на один или два порядка может происходить за время от нескольких минут до нескольких недель и на расстояниях в несколько десятков метров.

2.1.2 Рост кристаллов в результате осаждения водяного пара

Ледяной кристалл, помещенный в переохлажденное капельное облако, будет расти за счет перегонки водяного пара с капель на кристаллы, потому что давление водяного пара над ледяной поверхностью меньше, чем над поверхностью воды. При температуре, характерной для образования снежных осадков, перенасыщение в облаке по отношению к водной поверхности может быть невелико, но по отношению к поверхности льда составлять 10-20%. В результате происходит отток водяного пара от капель к ледяному кристаллу, который таким образом растет. Кристаллы быстро достигают размеров, при которых они начинают опускаться. В процессе падения кристалл растет за счет столкновения с облачными каплями, которые при низкой температуре замерзают. Если при падении кристалл пересекает уровень 0 °С, он может растаять полностью и выпасть на поверхность земли в виде дождевой капли.

Основная форма ледяного кристалла определяется температурой, при которой он растет, тогда как скорость роста и вторичные особенности зависят от степени пересыщения. Изменения формы обусловлены различиями в относительных скоростях роста граней кристалла; кристаллы могут быть призматическими или пластинчатыми в зависимости от того,

какие грани растут быстрее – боковые или базальные. При температуре от 0 до -4 °С преобладают пластинчатые кристаллы; от -4 до -10 °С – призмы, спирали и иглы; от -10 до -20 °С – толстые пластинки, дендриты и гексагональные пластинки, а от -20 до -35 °С – полые столбики. Основные изменения формы кристаллов отмечаются примерно при температурах -4,-10, и от -20 до -22 °С, при которых кривые, характеризующие скорость роста базальных и боковых граней, пересекаются.

2.1.3 Коагуляция за счет столкновения кристалла с облачными каплями

В процессе падения в облаке кристалл растет за счет столкновения с облачными каплями. Эффективность столкновений определяется как отношение числа капель, захваченных кристаллом, к общему числу капель, которые прошли внутри столба воздуха, ограниченного поперечным сечением кристалла и расстоянием, которое пролетел кристалл. Было предпринято много экспериментальных и теоретических исследований с целью определения эффективности столкновения для разных типов кристаллов, однако их значения все еще не выяснены окончательно. Эффективность сцепления определяется отношением числа замерзших и прилипших к кристаллу капель к общему числу капель, которые сталкивались с ним или касались его поверхности. Значение этого параметра близко к единице, поэтому часто при расчетах роста кристаллов вследствие такого вида коагуляции его не принимают во внимание. Размеры кристаллов, при которых наблюдается процесс коагуляции, зависят от формы кристалла: например, размер гексагональных пластинок и дендритов должен превышать 200 - 300 мкм, а малая ось столбиков – 50 мкм [1].

Исследование процесса коагуляции необходимо, так как этот процесс влияет на скорость падения снежных кристаллов, а кроме того, в результате этого процесса образуются снежная крупа и градины. Последние данные

показывают, что в процессе замерзания облачных капель выбрасываются вторичные ледяные частицы. Таким образом, коагуляция может привести к увеличению ледяных частиц в облаке.

2.1.4 Коагуляция за счет столкновения снежных кристаллов

Коагуляция представляет собой сцепление снежных кристаллов, происходящее при их столкновении. Эффективность захвата E зависит от эффективности сцепления (в данном случае между кристаллами) и эффективности столкновения. Большинство исследований установлено, что значение E меняется от 0.1 до 1 и зависит от температуры облака и электрического поля кристалла [1].

У природных кристаллов сцепление может быть обусловлено несколькими процессами, включая объединение кристаллов, осаждение водяного пара и спекание частиц. Процесс спекания представляет собой испарение с поверхности кристаллов и конденсацию на шейке между двумя кристаллами.

Измерения, проведенные внутри облаков, показывают, что размеры снежных хлопьев максимальны при температуре, близкой к 0 °С, поскольку при этом увеличиваются силы сцепления. Кроме того, чем большее расстояние проходят снежные хлопья при своем падении, тем больших размеров они достигают. При температуре выше 0 °С снежные хлопья быстро тают и падают в виде капель дождя, если нулевая изотерма лежит достаточно высоко над земной поверхностью. В типичном облаке снежные хлопья диаметром 1 мм могут вырасти до 10 мм в течение 20 минут, а при их таянии образуются дождевые капли диаметром 1 мм [1].

2.2 Связь между формой ледяных кристаллов и температурно-влажностными характеристиками облаков различных форм

Еще в 1930-х годах Б. П. Вейнберг высказал мнение, что снежинки являются “иероглифами”, несущими на себе записи условий тех слоев, где они возникли и через которые проходили до падения на землю. Последующие теоретические и экспериментальные исследования подтвердили это высказывание: было установлено, что основными факторами, определяющими форму образующихся частиц и характер их последующего роста (преимущественный рост боковых граней или оснований, образование новых центров роста), являются температура воздуха и пересыщение водяного пара.

В 1940-е годы (1942-1947) были начаты натурные исследования с целью установления связи между повторяемостью различных форм кристаллов и температурой внутри облаков, в подоблачном слое и у поверхности земли. Одно из первых подробных исследований форм ледяных кристаллов на различных высотах в тропосфере было выполнено с самолета Г. Вейкманом, при этом одновременно измерялась температура в области из которой брались пробы воздуха. Совместный анализ данных показал, что при температуре ниже $-25\text{ }^{\circ}\text{C}$ преобладающей формой кристаллов является гексагональная призма. Она характерна для перистых облаков и облаков среднего яруса. При переходе от облаков верхнего яруса к облакам среднего и нижнего ярусов, то есть в область более высоких температур, призмы постепенно заменяются толстыми, а затем тонкими гексагональными пластинками. Они обычно наблюдаются при температуре выше $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$. При температуре от $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ преобладают кристаллы звездчатой формы. Более подробные сведения о преобладающих формах кристаллов представлена в таблице 2.1 [4].

Таблица 2.1 – Преобладающие формы кристаллов в облаках различных форм

Уровень наблюдения	Диапазон температуры, °С	Облака	Форма кристалла
Нижняя тропосфера	0...-15	Ns	Тонкие гексагональные пластинки
		Sc, St	Звездчатые кристаллы снежной дендрической структуры
Средняя тропосфера	-15...-30	As	Толстые гексагональные пластинки
		Ac	Призматические столбики – одиночные и сдвоенные призмы
Верхняя тропосфера	Ниже -30	Изолированные Ci	Пучки призматических столбиков с воронкообразными углублениями. Несколько одиночных пустых призм
		Cs	Отдельные сформировавшиеся призмы

Впоследствии эти данные были дополнены результатами измерений в Германии и Канаде и обобщены в виде таблицы 2.2.

Таблица 2.2 – Диапазоны температуры, при которой возникают снежные кристаллы в атмосфере

Диапазон температуры, °С	Форма кристалла
-3...-8	Иглы
-8...-25	Пластинки, секторные звезды
-10...-20	Звездчатые дендриты
<-20	Призмы, одиночные кристаллы
<-30	Пучки из призм

Исследования связи форм снежинок, выпадающих из облаков различных форм, с температурными условиями в атмосфере также были выполнены и русскими исследователями Г. М. Башкировой, Т. А. Першиной, А. М. Боровиковым [4].

Значительный вклад в понимание закономерностей формирования ледяных кристаллов и их последующего роста внесли лабораторные эксперименты, позволяющие изучать рост снежинок при контроле температуры и влажности в окружающей среде [4]. Для обеспечения экспериментов были созданы специальные холодильные камеры разных размеров, в которых либо создавался туман и изучалась его кристаллизация, либо подвешивались отдельные капли (или ансамбли капель) и изучались их замерзание и последующий рост кристалла на замерзшей капле.

Проведенные разными авторами эксперименты позволили выявить зависимость формы кристаллов не только от температуры, но и от пересыщения водяного пара. Эта зависимость в форме диаграммы, по оси абсцисс которой отложена температура, а по оси ординат – пересыщение.

Первые диаграммы были построены Кампе, Вейкманом. На рисунке 2.2. дана диаграмма, построенная позднее У. Накайя.

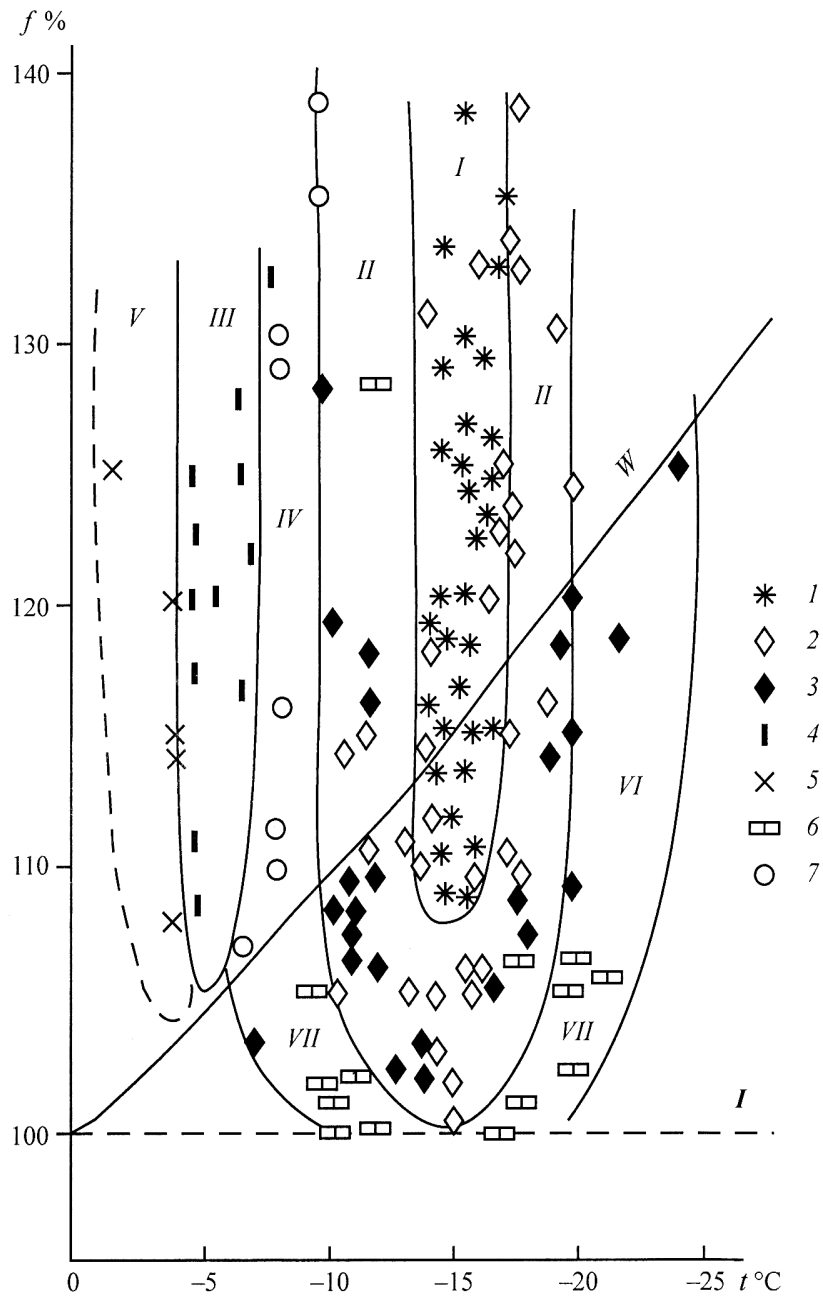


Рисунок 2.2 – Зависимость формы снежных кристаллов от температуры воздуха t и пересыщения f водяного пара (диаграмма У. Накайя): 1 – дендриты; 2 – секторные звездочки; 3 – толстые пластинки, пространственные пластинки; 4 – иглы; 5 – неправильные иглы; 6 – столбики; 7 – чаши; I – VII – области, где преобладают кристаллы определенной формы; W – насыщение над водой, I – насыщение надо льдом.

Впоследствии ряд исследователей ее уточняли, дополняли. В 1966 г. Была опубликована диаграмма Магоно и Ли, представленная на рисунке 2.3.

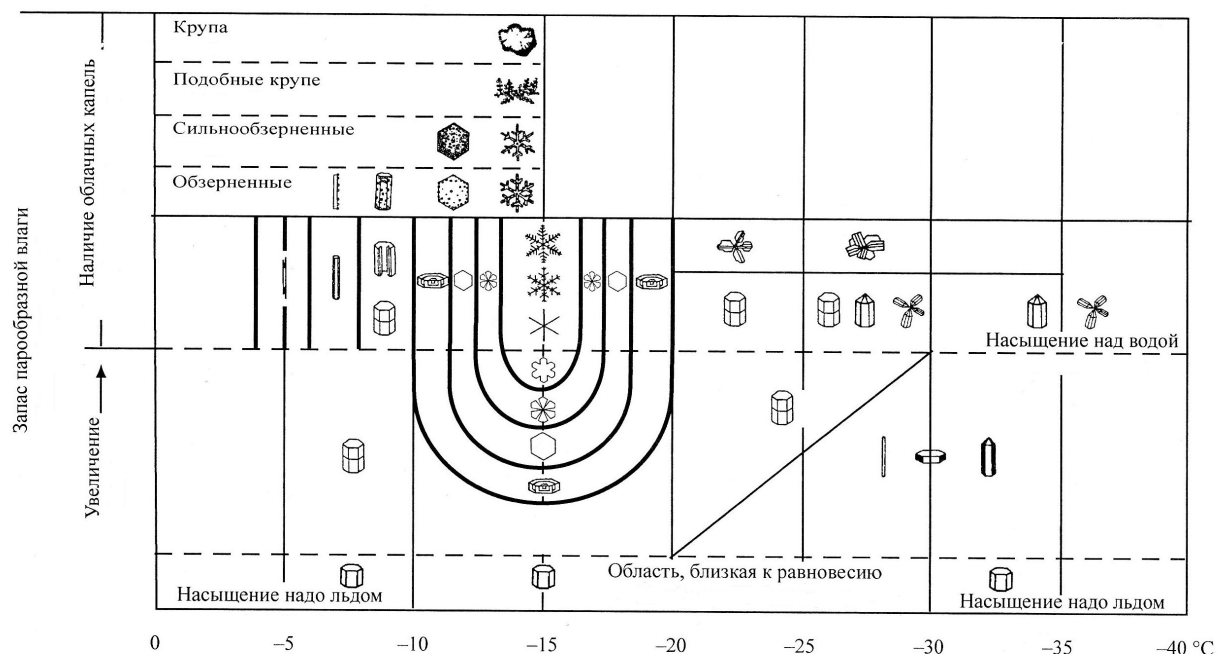


Рисунок 2.3 – Диаграмма Магоно и Ли

Сводные сведения всех этих авторов приведены на рисунке 2.4.

Из рисунка 2.4 видно, что в контролируемых условиях без принудительного обдува в зависимости от значений пересыщения и температуры воздуха можно выделить примерно 12 зон с определенной модификацией кристаллов. С ростом пересыщения вместо толстых сплошных призм и очень толстых шестигранных пластинок появляются более сложные формы в виде полых призм, длинных призм, на углах кристаллов начинают образовываться секторы и шипы, что приводит к появлению развитых дендритов. Последние развиваются только при условии, когда пересыщение становится больше равновесного насыщения над водой.

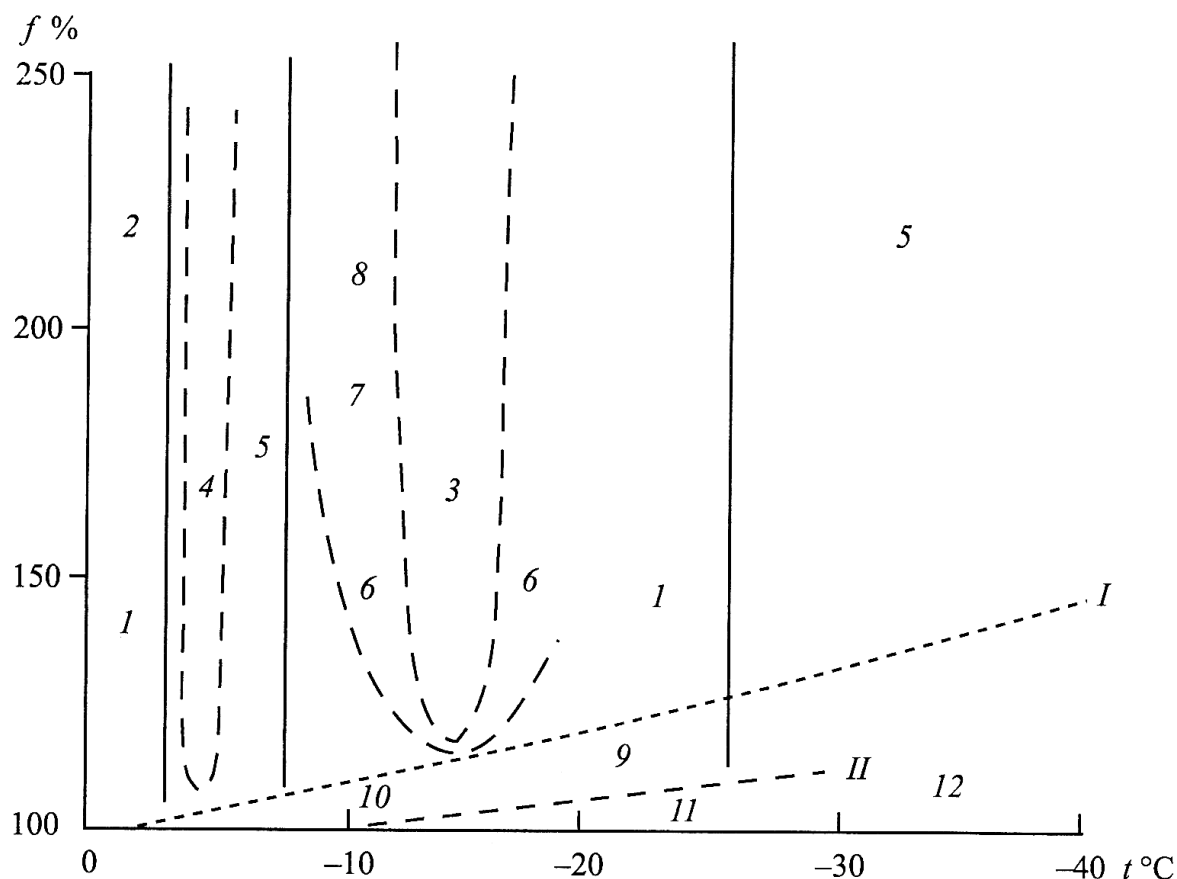


Рисунок 2.4 – Обобщенные данные о зависимости формы снежных кристаллов от температуры воздуха и пересыщения водяного пара: 1 – пластинки; 2 – дендриты; 3 – сильно разветвленные дендриты; 4 – иглы; 5 – пустотные столбики; 6 – секторные пластинки; 7 – незамкнутые пустотелые шестигранные цилиндры (завитки); 8 – пустотелые конусы (чаши); 9 – толстые пластинки; 10 – сплошные столбики; 11 – сплошные, очень толстые пластинки; 12 – длинные столбики; I – кривая насыщения водяного пара относительно воды; II – кривая насыщения водяного пара относительно льда.

Зависимость формы кристаллов от температуры более сложна. При небольших изменениях температуры свойства кристаллов претерпевают значительные изменения. При низких температурах формируются призмы, сплошные и пустотелые, затем при повышении температуры происходит перестройка формы и образуются секторные пластинки, затем дендриты и

снова секторные пластинки. Дальнейшее увеличение температуры приводит опять к резкой перестройке форм – появляются полые призмы, а затем иглы и снова пластинки. Причины такой резкой зависимости формы кристаллов от температуры еще не ясны.

Обнаруженная во время опытов в камерах зависимость формы кристаллов от температуры и пересыщения неоднократно проверялась в естественных условиях. Обнаружено хорошее соответствие форм кристаллов, выросших при сходных условиях в камерах и в естественных условиях [4].

Как было показано выше, образование снежинок (ледяных кристаллов) разной формы определяется температурой воздуха и пересыщением. Поэтому повторяемость выпадения кристаллов различных форм в природных условиях связана с физико-географическими особенностями района. Например, в центре европейской части России выпадают в основном ежи, звезды и пластинки, в Верхоянске – столбики и столбчатые ежи, а также толстые пластинки [4].

2.3 Причины многообразия снежных кристаллов

Типичной и наиболее распространенной формой снежных кристаллов является пластинчатая шестигранная призма, что обусловлено особенностью строения молекул воды и их взаимным расположением в кристаллической решетке льда. Молекула воды значительно более сложна, чем, например, электрон, и не все молекулы воды строго одинаковы. Если мы ограничимся молекулами воды, которые содержат два обычных протона и один обычный атом кислорода ^{16}O , то можно сказать о том, что все такие молекулы воды будут одинаковы. Однако в действительности не все так просто. Приблизительно одна молекула естественной воды из каждых 5000 будет содержать атом дейтерия вместо одного из протонов, и каждая 500-ая будет содержать изотоп кислорода ^{18}O вместо обычного ^{16}O . Если принять, что

среднестатистический кристаллик снега содержит 10^{18} молекул воды, оказывается, что приблизительно 10^{15} из этих молекул будут отличаться от основной массы. Эти необычные молекулы будут беспорядочно рассеяны всюду по кристаллу снега, давая уникальную и неповторимую структуру. Вероятность, что два кристалла снега имели бы то же самое расположение этих молекул, очень, и очень мала. Можно добавить, что, даже если мы ограничимся изотопически чистыми молекулами воды, это не значит, что все кристаллы снега будут подобны. Во время роста кристалла, молекулы не складываются вместе с совершенной регулярностью, и обычный кристалл снега содержит огромное число кристаллических дислокаций и дефектов кристаллической решетки, которые так же располагаются в объеме кристалла случайным способом. Другой причиной многообразия кристаллов снега является тот факт, что рост всякого кристалла является чрезвычайно чувствительным к внешним условиям. Во время роста кристалла снега, внешние условия постоянно изменяются, снег падает, и его заключительная форма отражает «историю» изменения этих условий роста. Большой красивый образец формируется, когда кристалл снега имеет длинную сложную «историю» роста. Чем более сложная «история» роста, тем более маловероятно, что любые два кристалла испытают точно ту же самую «судьбу».

Специалисты ледяных кристаллов утверждают, что самые красивые снежинки любят минимальную влажность и полное отсутствие ветра. Вот тогда вода и ветер не ломают их причудливые узоры и не бросают на твердую землю, а позволяют мягко и аккуратно приземлиться во всей своей красе. Такие снежинки легко найти в горах или на равнинах. Чем ближе к уровню моря и в целом к водоемам, тем чаще снег слипается в крупные хлопья. В этом случае найти целую снежинку намного сложнее, как и отделить ее от других, чтобы рассмотреть или сфотографировать.

2.4 Микрофизические характеристики снежных кристаллов.

В качестве основных микрофизических характеристик ледяных кристаллов обычно используются геометрические размеры кристалла, его масса, скорость падения и концентрация кристаллов в воздухе.

В таблице 2.4 приведены данные измерений среднего диаметра, массы и скорости падения снежинок шести различных форм.

Таблица 2.4 – Средние значения диаметра, массы и скорости падения снежных кристаллов

Форма	d , мм	m , мг	v , см/с
Иглы	1.53	0.004	50
Плоские дендриты	3.26	0.043	31
Пространственные дендриты	4.15	0.146	57
Снежная пыль	2.15	0.064	50
Обзерненные кристаллы	2.45	0.176	100
Крупа	2.13	0.800	180

Из таблицы 2.4 видно, что каждая форма снежинок имеет определенные характерные размеры.

Наиболее простыми формами снежинок, которые без труда поддаются определению, являются неискаженные или слабо искаженные снежные кристаллы, плоские гексагональные пластинки, столбики, пули и иглы. Эти кристаллы представляют собой более или менее правильные шестигранники с различным соотношением оснований и высоты. Характерными геометрическими размерами кристаллов пластинчатых форм являются гексагональный диаметр – это диаметр описанной вокруг основания окружности d и толщина h , а кристаллов столбчатых или игольчатых форм –

ширина (диаметр) d и длина l . На рисунке 2.5 даны графические пояснения введенным геометрическим параметрам.

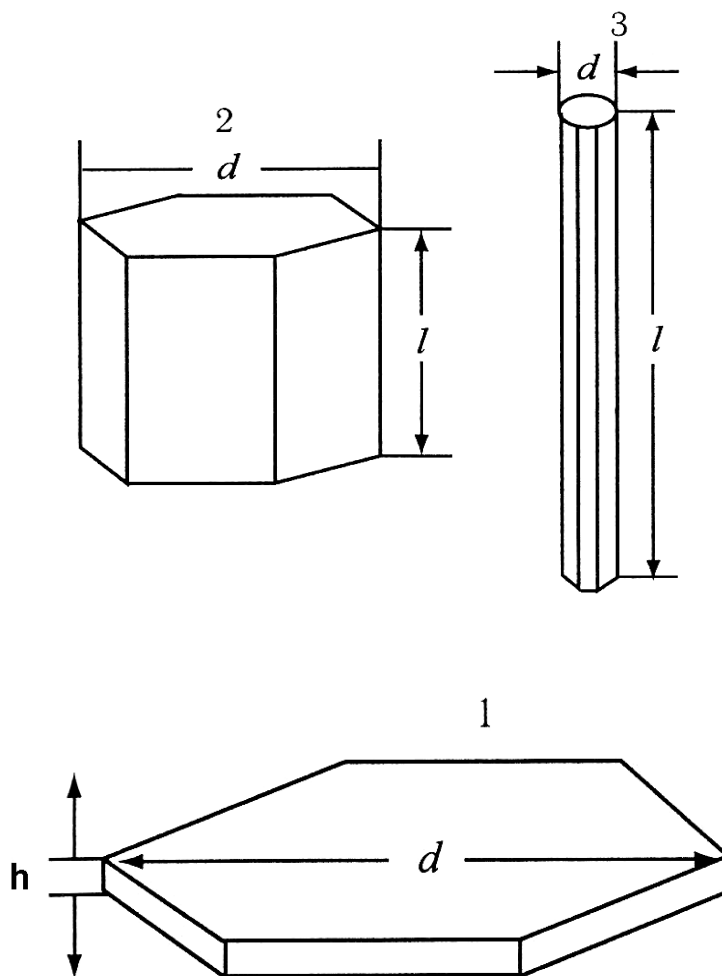


Рисунок 2.5 – Объемные формы ледяных кристаллов: 1 – пластинка ($h/d \ll 1$); 2 – призма ($l/d \geq 1$); 3 – столбик ($l/d \gg 1$)

Эти характерные параметры достаточно полно описывают форму кристаллов, что дает возможность сопоставлять измерения, сделанные в различных районах [4].

Диапазон изменения размеров кристаллов в облаках весьма широк. Измерения ряда авторов показали, что самые маленькие кристаллы имеют размеры около 10 мкм, максимальные значения диаметра пластинок и

звездочек равны 10^4 мкм, а столбиков и игл - 10^3 мкм. Наиболее часто толщина пластинок и диаметр игл в облаках составляют десятки микрометров, а диаметр пластинок и длина игл колеблются от десятков (сотен) до тысяч микрометров.

Для тонких пластинок и дендритов отношение h / d составляет от 0.01 до 0.2, для толстых пластинок – от 0.2 до 0.5. Для игл отношение d / l равно от 0.04 до 0.2, а для столбиков и пуль – от 0.2 до 0.5.

Толщина пластинок в естественных снегопадах колеблется от 5 до 90 мкм, а максимальный гексагональный диаметр достигает 9 мм. Максимальное отношение диаметра пластинки к ее толщине, наблюдаемое в естественных условиях, может быть равным 100. Чем меньше размеры пластинки, тем больше отношение ее характерных размеров приближается к единице, то есть на начальных этапах роста она представляется собой короткий столбик. При достижении пластиной размера $D_c = 100$ мкм на ее углах может начаться рост секторных лучей, а при $D_c > 600$ мкм – игольчатых лучей. При увеличении длины лучей пластинка превращается в звезду, секторную, пластинчатую или игольчатую, причем четкой границы перехода между двумя видами образований установить невозможно. А. Д. Заморский предлагает считать снежинку пластинкой, если длина лучей меньше $\frac{1}{8}$ ее гексагонального диаметра. Следует отметить, что из-за нечеткости понятий «звезда» и «пластинка» оценка повторяемости этих форм существенно зависит от выбора условных границ, применяемых исследователями. Для характеристики этих двух видов кристаллов обычно используют соотношения между их толщиной и диаметром. Результаты измерений, полученные по большому числу наблюдений, показывают, что в среднем для простых пластинок, пластинок с секторными игольчатыми и пластинчатыми лучами, секторных плоских дендритов, папоротникообразных 4 и 12-лучевых звезд имеет место одна и та же

закономерность, связывающая толщину h (длину боковой грани) с гексагональным диаметром d_2 (размеры в микронах),

$$h = 2.020d_2^{0.499} \quad (2.1)$$

где h – толщина (длина боковой грани), мкм;
 d_2 – гексагональный диаметр, мкм.

Размеры отдельных кристаллов значительно отличаются от средних значений, причем в широком диапазоне значений образование пластинки различной толщины при заданном значении ее диаметра равновероятно. В 90% случаев для заданных значений гексагонального диаметра толщины пластинки достаточно равномерно расположены в интервале значений h (1 ± 0.4). Для сравнительно узкого диапазона размеров пластинок $0.4 \text{ мм} < d_2 < 2.0 \text{ мм}$ получена также зависимость массы кристалла от величины его гексагонального диаметра, которую мы рассмотрим чуть позже.

Отношения высоты к гексагональным диаметрам призм могут быть самыми разнообразными (от 1 до 12). Различия в структуре призм, образующихся в «теплой» и «холодной» областях, не обнаружено. Для столбиков средняя зависимость между длиной кристалла h и его диаметром d может быть представлена в виде:

$$d_2 = -8.479 + 1.002l - 0.00234l^2, \text{ при } h < 200 \text{ мкм}, \quad (2.2)$$

$$d_2 = 11.3h^{0.414}, \text{ при } h > 200 \text{ мкм}. \quad (2.3)$$

Для одной и той же длины h величины d_2 кристалла могут находиться в пределах $d_2(1 \pm 0.5)$, причем значения d_2 внутри этого интервала равновероятны.

Вышеуказанные соотношения относятся к столбчатым кристаллам, образовавшимся при сравнительно больших пересыщениях и низких температурах или при высоких температурах и низких пересыщениях.

При низких температурах ($T < -35$ °С) и небольших пересыщениях образуются столбики, длина которых меньше 0.1 – 0.15 мм (N1e). У кристаллов этого типа отношение высоты к гексагональному диаметру изменяется от 10 до 50. Основное отличие таких кристаллов от двух предыдущих типов – слабовыраженная внутренняя и внешняя структура.

Плоскость сечения шестигранных столбиков (перпендикулярно направлению высоты) имеет вид неправильного шестигранника, причем отклонения от формы правильного шестигранника могут достигать значительных величин. Если за меру отклонения взять отклонение фактических значений соотношения между радиусом вписанной r_1 и описанной r_2 относительно шестигранника окружности от расчетных ($r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} r_2$), то оно может достигать 100%; обычно значение отклонений лежит в пределах от 25 до 30%.

В числе характерных ледяных образований, имеющих сравнительно простую форму, близкую к столбикам, находятся иглы. По определению А. Д. Заморского, иглы представляют собой трубку, имеющую на каждом конце 3-4 ланцетовидных лепестка [2]. Они образуются в узком интервале температур от -6 до -4 °С при различном пересыщении. Максимальная длина игл равна -3 мм при толщине до 150 мкм. Связь между длиной иглы h_u и максимальной диагональю оснований w выражается соотношением:

$$w = 1.099 h_u^{0,611}, \quad (2.4)$$

где w – максимальная диагональ основания, мм
 h – длина иглы, мм

При заданной длине иглы значения w изменяются в пределах $w(4 \pm 0.75)$. Так же как и в случаях пластинок и призм, значения w в указанном диапазоне h_u равновероятны.

Снежинки типа звезд, звездчатых и пластинчатых батарей, звездчатых, пластинчатых запонок, хотя и состоят из частей правильной формы, имеют достаточно сложное строение, вследствие чего для их всестороннего описания в общем случае необходимо большое количество параметров. Так как у снежинок сложных форм нет естественных критериев, позволяющих тот или иной параметр принять за основной, а все остальные рассматривать как вспомогательные, то снежинки сложных форм обычно описывают одним из параметров – максимальной длиной, диаметром описываемой сферы или осями описываемого эллипсоида. При этом отдельные отростки, существенно изменяющие общий вид снежинки и мало влияющие на массу и скорость падения, во внимание не принимаются. Подобное упрощение позволяет достаточно просто сопоставлять форму и характерны размер снежинок с плотностью, массой, скоростью падения и выводить основные соотношения.

Характерной формой снежинок сложной формы являются «звезды», представляющие собой симметричные шестилучевые плоские кристаллы (тип P, исключая P1a, P6a и P6b). Частицы этого вида отличаются сложностью и, хотя по своей структуре звезды симметричны, их детальное описание не может быть осуществлено при помощи разумно ограниченного числа параметров.

Форма лучей у звезд очень разнообразна – от иголок (игольчатая звезда) до пластинок (пластинчатая звезда). Из-за многообразия снежинок, имеющих форму звезд, их часто подразделяют на большое число видов и подвидов, однако из-за отсутствия четких естественных границ между звездами различного вида такое подразделение вряд ли оправдано.

Звезды образуются в области температур от -17 до -13°C при среднем и сильном пересыщении, и усложнение их формы происходит при падении через нижележащие слои облака, где дальнейший рост происходит на концах лучей в виде секторных пластинок, призм и игл. Рост кристалла в различных зонах продолжается на концах лучей или на ответвлениях лучей, что вызывает проявление многообразнейших разновидностей кристаллов. На целесообразность объединения всех плоских звезд в одну группу указывает сходство основных параметров у звезд различного внешнего вида. Так, например, зависимость между толщиной и гексагональным диаметром у звезд, имеющих широкие пластинчатые и игольчатые лучи, а также у звезд с пластинками на концах и с секторными концами одна и та же и равна:

$$h = 2.028d_{\text{г}}^{0,431}, \quad (2.5)$$

Это соотношение близко к аналогичному для гексагональных пластинок с небольшими лучами:

$$h = 2.02 d_{\text{г}}. \quad (2.6)$$

Соотношения между h и $d_{\text{г}}$ для снежинок плоских без подразделения по типам и видам может быть описано соотношением:

$$h = 2.51 d_{\text{г}}^{0,396}, \quad (2.7)$$

которое объединяет шестигранные пластинки, пластинки с секторными ответвлениями, пластинки с игольчатыми и секторными лучами, плоские звезды с широкими лучами, звезды с пластинками и секторами на концах, плоские дендриты, звезды с папоротникообразными лучами, четырехлучевые звезды и звезды с 12 лучами. При одном и том же гексагональном диаметре

толщина кристалла лежит в пределах $h (1-0,4) - h (1+0.4)$, причем величина h внутри этого интервала равновероятна.

Масса снежинок

В таблице 2.5 представлены данные о массе снежинок различных форм, полученные Г. М. Башкировой и Т. А. Першиной. В таблице указаны также их размеры.

Таблица 2.5 – Экспериментальные данные о размере и массе снежинок

Форма снежинок	Размер снежинок, мм		Масса снежинок, мг	
	от	до	от	до
Столбики	0.14	0.65	0.0009	0.0368
	0.20	0.92	0.0007	0.0307
Пули: пирамидальных форм	0.32	0.60	0.0047	0.0208
	0.24	0.84	0.0009	0.0326
с небольшими пластинками на основаниях	0.42	0.60	0.0096	0.0208
	0.48	0.85	0.0071	0.0368
с большими пластинками на основаниях	0.50	0.97	0.0103	0.0485
Ежи	0.14	0.59	0.0026	0.0823
Запонки	0.40	1.43	0.0150	0.1339
Шестигранники: толстые или объемные	0.20	0.47	0.0006	0.0208
	тонкие	0.39	0.99	0.0120
сильнообзерненные	0.38	1.10	0.0036	0.0446
на одной стороне которых имеются ледяные наросты сублимационного характера	0.36	0.48	0.0224	0.0335

Окончание таблицы 2.5

Форма снежинок	Размер снежинок, мм		Масса снежинок, мг	
	от	до	от	до
Звездочки:				
дендритные с развитыми разветвленными лучами	0.88	1.90	0.0009	0.0144
дендритные с развитыми малоразветвленными идущими из центра лучами	0.47	3.42	0.0006	0.1545
дендритные с развитыми малоразветвленными лучами, идущими из центра, заканчивающимися пластинками	0.47	3.42	0.0015	0.1545
пластинчатые	0.42	1.41	0.0024	0.0502
игольчатые	1.11	2.13	0.0041	0.0390
сильнообзерненные пластинчатые	0.49	2.10	0.0064	0.2322
сильнообзерненные дендритные	2.16	4.17	0.0828	0.5768
Крупа	0.10	1.89	0.0001	0.4035
Иглы:				
Гладкие прозрачные	0.75	2.62	0.0009	0.0116
на некоторой части поверхности которых имеются почти прозрачные ледяные пластинки сублимационного происхождения	1.51	3.08	0.0078	0.0327
вся поверхность которых покрыта ледяными отложениями сублимационного характера в виде столбиков	0.93	2.02	0.0051	0.0347

Из таблицы 2.5 видно, что масса снежинок меняется весьма в широком диапазоне значений: от 10^{-4} до 10^{-2} мг.

Связь между массой и размером снежинок показана на рисунке 2.6.

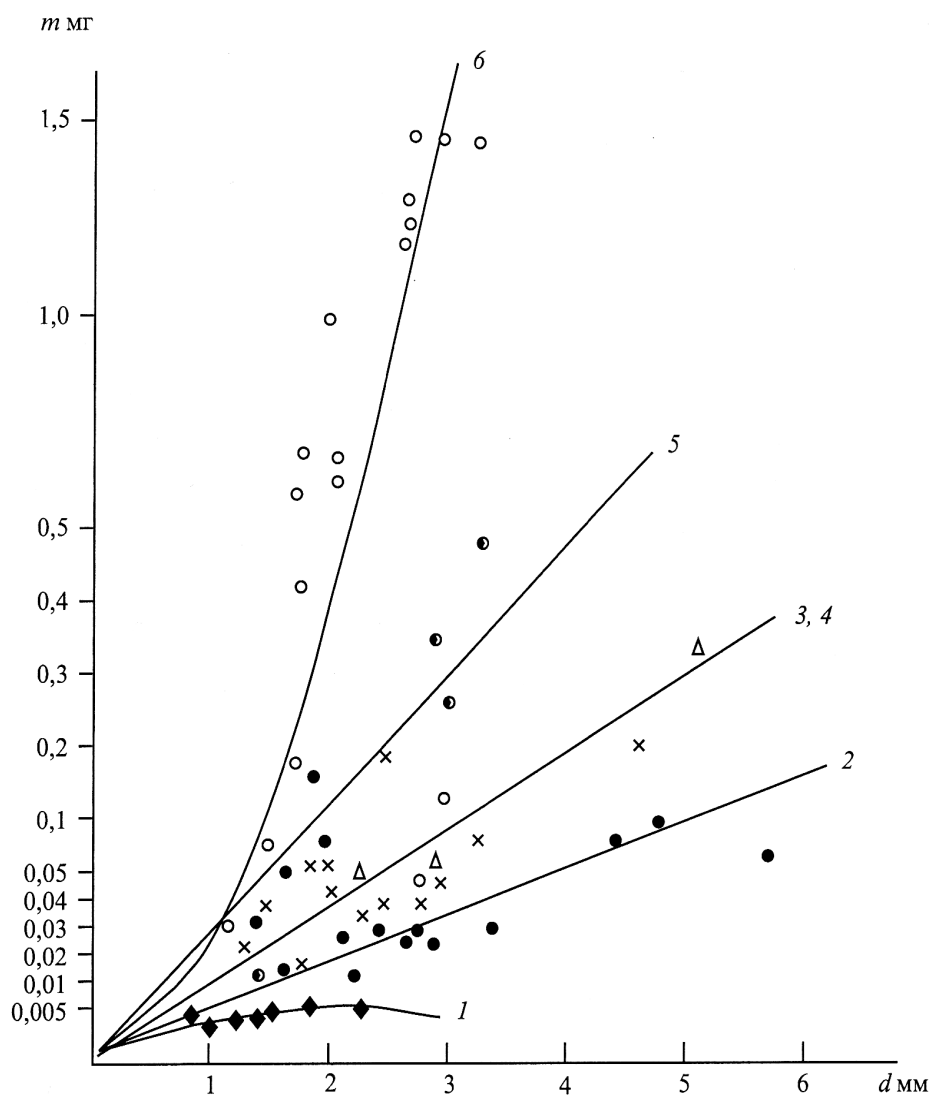


Рисунок 2.6 – Связь между массой и размером снежинок разных форм по данным У. Накайя: 1 – иглы; 2 – дендритные пластинки; 3 – пространственные дендриты; 4 – снежная пудра; 5 – обзерненные кристаллы; 6 – крупа.

Эти данные были получены Накайя и Терада, которые улавливали кристаллы на покрытое парафином предметное стекло, затем давали им растаять и определяли массу кристаллов по диаметрам образовавшихся капелек [4].

Масса снежинки звездчатой формы, естественно, зависит от ее формы, ибо чем меньше ширина лучей, тем при том же диаметре меньше масса.

Так как толщина лучей меняется от основания к концам, то для вычисления массы звезд необходимы измерения большого количества различных параметров, что трудно осуществить практически. Минимальный гексагональный диаметр звезд равен 0.3 мм, максимальный достигает 9 мм.

Площадь кристаллов звездчатых форм значительно меньше площади описанного круга. Поэтому кристаллы этого вида, несмотря на большие размеры, имеют небольшую массу и скорость падения.

Ввиду многообразия встречаемых в естественных условиях звездчатых кристаллов и отсутствия естественных критериев для выделения различных групп и подгрупп любое соотношение между массой снежинок и их линейными размерами будет достаточно субъективно. Нетрудно видеть, что хотя характер связи между массой и размерами снежинок один тот же, конкретные значения параметров существенно разные. Так, для звезд развитыми разветвленными пластинчатыми лучами:

$$m_c = 6.3 \cdot 10^{-6} d_z^{2.7}, \quad (2.8)$$

где m – масса кристалла, г;
 d_z – диаметр кристалла, мм;
Для пластинчатых звезд:

$$m_c = 1.5 \cdot 10^{-5} d_z^{2.95}. \quad (2.9)$$

Для звездочек с развитыми разветвленными пластинчатыми лучами в первом приближении можно предложить выражение:

$$m_c = 1.2 \cdot 10^{-6} d_z^{2.8}. \quad (2.10)$$

Скорость падения кристаллов

Скорость падения кристаллов является сложной функцией их размеров, формы, плотности. Кристаллы простых форм падают со скоростью менее 1 м/с, обзерненные кристаллы – со скоростью около 1 м/с и более. Подтаивая, снежинки становятся более компактными, и скорость их падения увеличивается. Зависимость скорости падения кристаллов от их размеров показана на рисунке 2.7 и в таблицах 2.4 и 2.6.

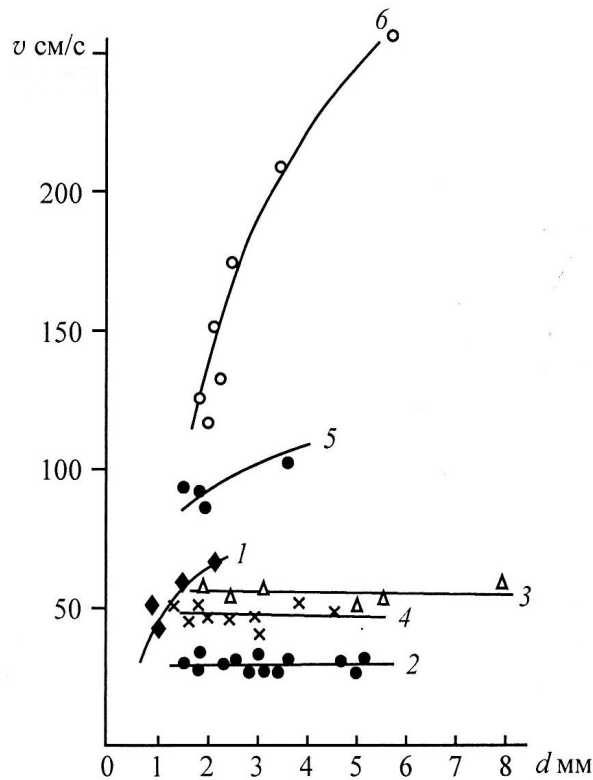


Рисунок 2.7 – Установившаяся скорость падения ледяных кристаллов (по данным У. Накайя и С. Терада): 1 – иглы; 2 – дендритные пластинки; 3 – пространственные дендриты; 4 – снежная пудра; 5 – обзерненные кристаллы; 6 – крупа.

Таблица 2.6 – Данные о скорости падения снежинок

Форма снежинок	Размер снежинок, мм	Скорость падения снежинок, см/с
Пули с пластинками на основаниях	0.32 – 0.55	77.0 – 106.3
	0.39 – 0.56	58.7 – 80.7
	0.48 – 0.85	51.0 – 91.7
Ежи на основаниях которых имеются пластинки	0.54 – 0.86	75.8 – 106.3
	0.53 – 1.23	70.0 – 118.2
Запонки	0.61 – 1.36	59.4 – 113.1
Пластинки толстые (или объемные шестигрники)	0.28 – 0.43	32.2 – 48.0
Шестигранники тонкие	0.32 – 0.65	20.8 – 41.0
Звездочки дендритные с разветвлением лучами	0.91 – 3.08	12.5 – 46.3
	0.57 – 3.42	21.7 – 67.9
дендритные с развитыми слаборазветвленными, идущими от центра лучами, заканчивающимися небольшими пластинками		
пластинчатые	0.42- 1.30	21.0 – 61.0
Крупа	0.28 – 1.35	34.4 – 113.6

Из этих данных видно, что скорость падения снежинок определяется их формой и линейными размерами. Для снежинок одинакового размера наблюдается связь между массой и скоростью их падения. Так, скорость падения различного вида звездочек и крупы увеличивается с ростом их массы.

Скорость падения u_c плоских снежных кристаллов определяется выражением:

$$u_c = \sqrt{\frac{2gh(\rho_n - \rho)}{C_D \rho}}, \quad (2.11)$$

где u_c – скорость падения кристаллов, см/с;
 ρ_n – плотность кристалла;
 ρ – плотность воздуха;
 C_D – коэффициент лобового сопротивления.

Принимая, что при $10^2 < Re < 10^3$, $C_D = 1,2$ и $h \approx 1,1 \cdot 10^{-3}$ см, Магано получил величину скорости, близкую к наблюдаемой (35 см/с).

Аналогичные выражения имеют место для скорости падения призмы, однако практическое использование этих выражений затруднено, ибо, как правило, не известны точные значения величин h и C_D . Более удобным является вычисление скорости в зависимости от безразмерных параметров:

$$u_c = \frac{f(x)v}{d_2 \rho}, \quad (2.12)$$

где $f(x)$ – некая функция параметра x ;

x – параметр, зависящий от формы кристалла;

v – коэффициент кинематической вязкости воздуха.

Для диска:

$$x = \frac{2hd_2^2}{v^2} \left(\frac{\rho_n - \rho}{\rho} \right) g, \quad (2.13)$$

Для цилиндра:

$$x = \frac{d_z^3}{\nu^2} \left(\frac{\rho_n - \rho}{\rho} \right) g, \quad (2.14)$$

Сравнения расчетных значений скоростей падения для кристаллов правильной формы с данными измерений показывают, что выражения 2.12 – 2.14 правильно отражают свойства естественных снежинок и расчеты по ним дают значения скорости, близкие к скоростям падения снежинок пластинчатых и столбчатых форм, наблюдаемым в естественных условиях. Так согласно измерениям, для снежинок в виде тонких шестигранников с гексагональным диаметром 0,5, 1 и 1,5 мм массы и скорости падения соответственно равны $2,7 \cdot 10^{-3}$, $1,9 \cdot 10^{-2}$ и $6 \cdot 10^{-2}$ и 30, 49 и 63 см/с, а по вычислениям, используя рис, для дисков с той же массой и размерами, получены скорости 25, 43 и 60 см/с. Расхождения вызваны скорее всего неточностью в определении массы, так как плоские кристаллы имеют разную толщину в центре и по краям, и их внутренняя структура неоднородна (имеют место отдельные включения в виде пузырьков воздуха и полостей).

По экспериментальным данным зависимость скорости падения снежинок пластинчатых форм от их гексагонального диаметра d_z можно выразить соотношением:

$$v_c = 50 d_z^{0,75}, \quad (2.15)$$

где v_c в м/с, а d_z в мм.

Для снежинок правильной геометрической формы на моделях были получены закономерности скорости их падения и ориентации при падении. При $Re \approx 0,01$, что соответствует частицам с $d_z \approx 50$ мкм, ориентация плоского кристалла в воздухе произвольна. Когда $1 < Re < 30$ ($0,1 < d_z < 1$ мм), снежинки ориентируются горизонтально. Такая ориентация сохраняется и для более

крупных снежинок. Однако начиная с $Re \approx 30 \div 50$ ($d_s = 3 \div 5$ мм) снежинки при падении начинают колебаться, а при $Re \approx 500$ - кувыркаться.

Две снежинки, имеющие форму шестигранников и находящиеся на расстоянии порядка гексагональных диаметров, догоняют друг друга и затем падают вместе. Крупные пластинки ($Re > 100$) при совместном падении могут образовывать «бабочку», один диск при этом располагается горизонтально, а два других своими краями касаются друг друга и центра горизонтального кристалла, их плоскости находятся под углом 30° к нижнему кристаллу.

Столбчатые кристаллы при $d_s/h > 1$ падают как диски, при $d_s/h < 1$ они меняют свою ориентировку и падают так, что их высота располагается горизонтально. При $Re < 50$ кристаллы падают стабильно, но при больших значениях Re начинаются колебания, что связано появлением и отрывом вихрей.

Кристаллы игольчатых и столбчатых форм диаметром от 0.01 до 0.1 мм, первоначально находящиеся на расстоянии порядка 50 диаметров, при падении соединяются друг с другом: два кристалла соединяются под прямым углом, при трех кристаллах – два параллельно рядом, а третий – перпендикулярно этим двум. В естественных условиях имеет место самая различная ориентация двух или большего количества кристаллов. Объясняется это прежде всего тем, что даже правильные шестигранники и шестигранные пластинки имеют несимметричные отклонения.

Пластинчатые звезды и сильно разветвленные дендриты имеют тот же характер падения, что и шестигранные тонкие пластинки. В основном все звезды, кроме самых больших ($d_s > 5$ мм), падают, ориентируясь горизонтально. Частицы большого размера при сохранении среднего горизонтального падения колеблются вдоль одного из диаметров или прецессируют. Особенно большие и тонкие звезды, так же как и плоские пластинки, начинают парить, описывать спирали большого диаметра или вращаться вокруг вертикальной оси. Вследствие сильно разветвленной

поверхности и малой массы звездчатые кристаллы имеют наименьшую скорость падения по сравнению со всеми остальными кристаллами той же массы. Наименьшую скорость падения имеют звезды с развитыми разветвленными пластинчатыми лучами (P1b).

Некоторое время существовало мнение, что скорость падения звезд не зависит от их диаметра. Однако более поздние наблюдения опровергли это мнение. Оказывается, чем больше диаметр частицы, тем при прочих равных условиях больше скорость падения.

Пластинчатые звезды и тонкие шестигранники имеют одну и ту же зависимость скорости падения от гексагонального диаметра, а именно:

$$v_c = 50d_z^{0,75}, \quad (2.16)$$

где v_c в см/с, а d_z в мм.

Для звезд с развитыми слаборазветвленными и неразветвленными пластинчатыми лучами зависимость скорости от гексагонального диаметра описывается выражением:

$$v_c = 35 d_z^{0,62}, \quad (2.17)$$

для звезд с развитыми разветвленными пластинчатыми лучами:

$$v_c = 12.5d_z^{1,12}. \quad (2.18)$$

Снежинки неправильной формы при падении несколько меняют свою ориентацию (вращаются или описывают спирали). В результате скорость их падения изменяется.

Плотность ледяных кристаллов

Скорость падения облачных кристаллов и снежинок существенно зависит от их плотности. Измерения этой характеристики показали, что

объемная плотность мелких столбиков близка к 0.9 г/см^3 , то есть к плотности сплошного льда. С ростом кристаллов за счет воздушных включений их плотность может уменьшаться до $0.3 - 0.4 \text{ г/см}^3$. Плотность гладких прозрачных игл размером $0.75 - 2.60 \text{ мм}$ изменяется от 0.22 до 0.71 , а снежинок пирамидальных форм размером $0.24 - 0.84 \text{ мм}$ – от 0.22 до 0.85 г/см^3 . Средняя плотность таких снежинок уменьшается с ростом их линейных размеров, причем средняя плотность снежинок пирамидальных форм уменьшается более резко с изменением размеров, чем гладких прозрачных игл. Такое уменьшение плотности снежинок обусловлено наличием пустот внутри снежинок, образующихся в процессе их роста.

Подводя итог второй главы можно сказать, что на формирование кристаллов льда особое влияние оказывают температурно-влажностные характеристики. При движении в облаках кристалл попадает в области с разными атмосферными условиями, что приводит к изменению внешнего вида кристалла. Более благоприятные условия для сублимационного роста кристаллов наблюдаются при температуре -15°C . При переходе кристалла в зоны с высокой влажностью, образуются кристаллы более сложной формы.

Представлены характерные микрофизические параметры основных форм снежных кристаллов. Приведены зависимости между геометрическими размерами, массой и скоростью падения.

Если рассматривать кристалл на молекулярном уровне, то можно сказать, что кристалл льда содержит в себе значительное количество молекул с изотопами кислорода ^{18}O и атомами дейтерия. Это определяет разнообразие структуры кристаллов при одних и тех же внешних атмосферных условиях.

3 Математический аппарат фрактальной геометрии

3.1 История появления фракталов

Первые идеи фрактальной геометрии возникли в 19 веке. Кантор с помощью простой рекурсивной (повторяющейся) процедуры превратил линию в набор несвязанных точек (так называемая Пыль Кантора). Он брал линию и удалял центральную треть и после этого повторял то же самое с оставшимися отрезками. Пеано нарисовал особый вид линии, представленный на рисунке 3.1.



Рисунок 3.1 – линии Пеано

Для ее рисования Пеано использовал следующий алгоритм. На первом шаге он брал прямую линию и заменял ее на 9 отрезков длиной в 3 раза меньшей, чем длинна исходной линии (Часть 1 и 2 рисунка 3.1). Далее он делал то же самое с каждым отрезком получившейся линии. И так до бесконечности. Ее уникальность в том, что она заполняет всю плоскость. Доказано, что для каждой точки на плоскости можно найти точку, принадлежащую линии Пеано. Кривая Пеано и пыль Кантора выходили за рамки обычных геометрических объектов. Они не имели четкой размерности. Пыль Кантора строилась вроде бы на основании одномерной прямой, но состояла из точек (размерность 0). А кривая Пеано строилась на основании одномерной линии, а в результате получалась плоскость.

Вплоть до 20 века шло накопление данных о таких странных объектах, без какой либо попытки их систематизировать. Так было, пока за них не взялся Бенуа Мандельброт - отец современной фрактальной геометрии и слова фрактал. Работая в IBM математическим аналитиком, он изучал шумы в электронных схемах, которые невозможно было описать с помощью

статистики. Постепенно сопоставив факты, он пришел к открытию нового направления в математике - фрактальной геометрии.

Чтобы представить себе фрактал понаглядней, рассмотрим пример, приведенный в книге Б.Мандельброта "The Fractal Geometry of Nature" ("Фрактальная геометрия природы") ставший классическим - "Какова длина берега Британии?". Ответ на этот вопрос не так прост, как кажется. Все зависит от длины инструмента, которым мы будем пользоваться. Померив берег с помощью километровой линейки, мы получим какую-то длину. Однако мы пропустим много небольших заливчиков и полуостровков, которые по размеру намного меньше нашей линейки. Уменьшив размер линейки до, скажем, 1 метра - мы учтем эти детали ландшафта, и, соответственно длина берега станет больше. Пойдем дальше и измерим длину берега с помощью миллиметровой линейки, мы тут учтем детали, которые больше миллиметра, длина будет еще больше. В итоге ответ на такой, казалось бы, простой вопрос может поставить в тупик кого угодно - длина берега Британии бесконечна [5].

Роль фракталов в машинной графике сегодня достаточно велика. Они приходят на помощь, например, когда требуется, с помощью нескольких коэффициентов, задать линии и поверхности очень сложной формы. С точки зрения машинной графики, фрактальная геометрия незаменима при генерации искусственных облаков, гор, поверхности моря. Фактически найден способ легкого представления сложных неевклидовых объектов, образы которых весьма похожи на природные [5].

Одним из основных свойств фракталов является самоподобие. В самом простом случае небольшая часть фрактала содержит информацию о всем фрактале.

Определение фрактала, данное Мандельбротом, звучит так: *"Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому"*.

3.2 Размерность фракталов

В своей повседневной жизни мы постоянно встречаемся с размерностями. Мы прикидываем длину дороги (250 м), узнаем площадь квартиры (78 м²). Это понятие вполне интуитивно ясно и, казалось бы, не требует разъяснения. Линия имеет размерность 1. Это означает, что, выбрав точку отсчета, мы можем любую точку на этой линии определить с помощью одного числа - положительного или отрицательного. Причем это касается всех линий - окружность, квадрат, парабола и так далее.

Размерность 2 означает, что любую точку мы можем однозначно определить двумя числами. Не надо думать, что двумерный - значит плоский. Поверхность сферы тоже двумерна (ее можно определить с помощью двух значений - углов наподобие широты и долготы).

Если смотреть с математической точки зрения, то размерность определяется следующим образом: для одномерных объектов - увеличение в два раза их линейного размера приводит к увеличению размеров (в данном случае длины) в два раза (2^1).

Для двумерных объектов увеличение в два раза линейных размеров приводит к увеличению размера (например, площадь прямоугольника) в четыре раза (2^2).

Для 3-х мерных объектов увеличение линейных размеров в два раза приводит к увеличению объема в восемь раз (2^3) и так далее.

Таким образом, размерность D можно рассчитать исходя из зависимости увеличения "размера" объекта S от увеличения линейных размеров L . $D = \log(S) / \log(L)$. Для линии $D = \log(2) / \log(2) = 1$. Для плоскости $D = \log(4) / \log(2) = 2$. Для объема $D = \log(8) / \log(2) = 3$. Может быть немного запутано, но в общем-то несложно и понятно.

Попробуем посчитать размерность для кривой Пеано. Итак, у нас исходная линия, состоящая из трех отрезков длины X , заменяется на 9

отрезков втрое меньшей длины. Таким образом, при увеличении минимального отрезка в 3 раза длина всей линии увеличивается в 9 раз и $D = \log(9)/\log(3) = 2$ - двумерный объект.

Когда размерность фигуры получаемой из каких-то простейших объектов (отрезков) больше размерности этих объектов - мы имеем дело с фракталом.

3.3 Типы фракталов

Фракталы делятся на группы. Самые большие группы это:

- геометрические фракталы;
- алгебраические фракталы;
- системы итерируемых функций.

Геометрические фракталы

Именно с них и начиналась история фракталов. Фракталы этого класса самые наглядные. Этот тип фракталов получается путем простых геометрических построений. В двухмерном случае их получают с помощью некоторой ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой *генератором*. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор, в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры, получается геометрический фрактал.

Рассмотренная выше кривая Пеано является геометрическим фракталом. На рисунках 3.2, 3.3 и 3.4 приведены другие примеры геометрических фракталов.

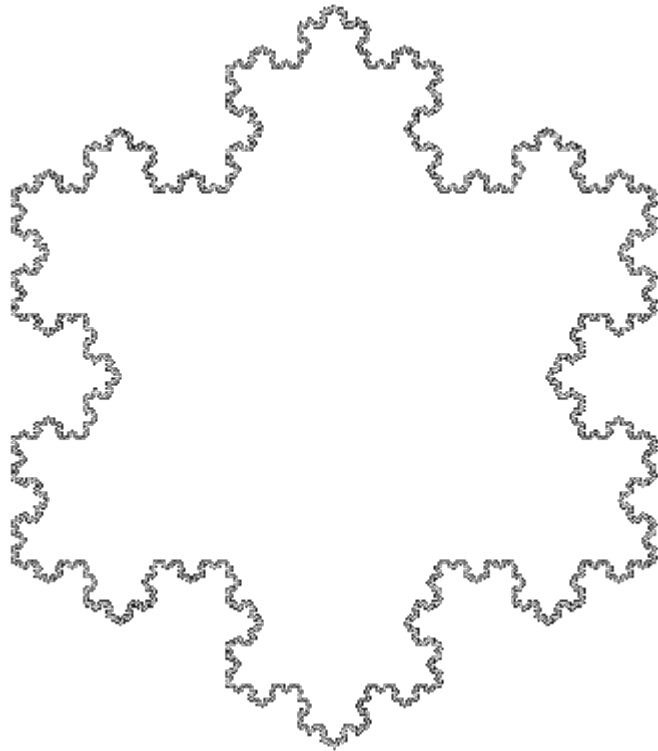


Рисунок 3.3.1 – Фрактал “Снежинка Коха”



Рисунок 3.3 – Фрактал “Лист”

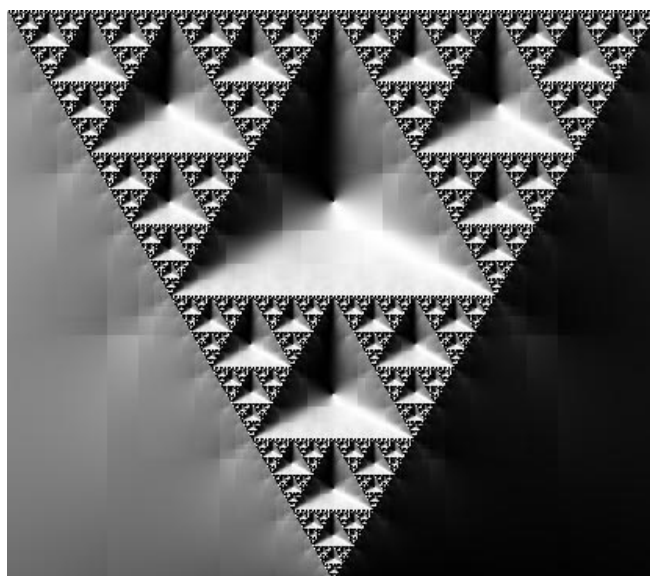
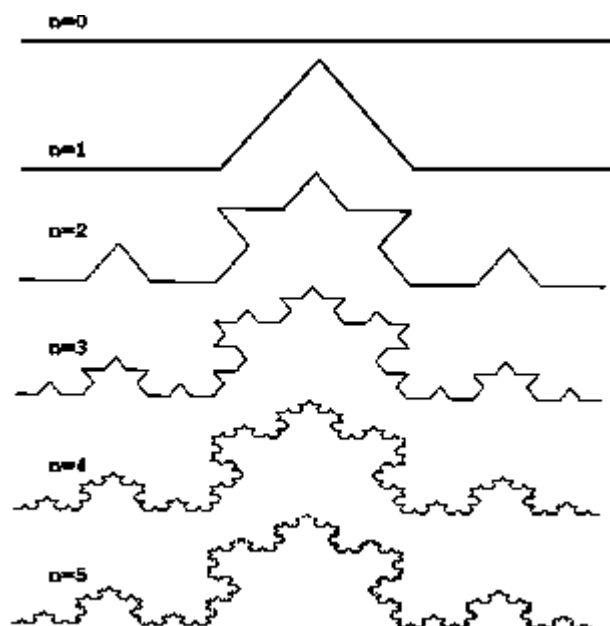


Рисунок 3.4 – Фрактал “Треугольник Серпинского”

Из этих геометрических фракталов очень интересным и довольно знаменитым является первый - снежинка Коха.

Построение кривой начинается с отрезка единичной длины - это 0-е поколение кривой Кох. Далее каждое звено (в нулевом поколении один отрезок) заменяется на *образующий элемент*, обозначенный на рисунке 3.5 через $n=1$. В результате такой замены получается следующее поколение кривой Коха. В 1-ом поколении - это кривая из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по $1/3$. Для получения 3-го поколения проделываются те же действия - каждое звено заменяется на уменьшенный образующий элемент. Итак, для получения каждого последующего поколения, все звенья предыдущего поколения необходимо заменить уменьшенным образующим элементом. Кривая n -го поколения при любом конечном n называется *предфракталом*. На рисунке 3.5 представлены пять поколений кривой. При n стремящемся к бесконечности кривая Коха становится фрактальным объектом.



Риснок 3.5 – Построение кривой Коха

Размерность снежинки Коха (при увеличении снежинки в 3 раза ее длина возрастает в 4 раза) $D = \log(4)/\log(3) = 1.2619\dots$

Для получения другого фрактального объекта нужно изменить правила построения. Пусть образующим элементом будут два равных отрезка, соединенных под прямым углом. В нулевом поколении заменим единичный отрезок на этот образующий элемент так, чтобы угол был сверху. Можно сказать, что при такой замене происходит смещение середины звена. При построении следующих поколений выполняется правило: самое первое слева звено заменяется на образующий элемент так, чтобы середина звена смещалась влево от направления движения, а при замене следующих звеньев, направления смещения середин отрезков должны чередоваться. На рисунке 3.6 представлены несколько первых поколений и 11-е поколение кривой, построенной по вышеописанному принципу. Предельная фрактальная кривая (при n стремящемся к бесконечности) называется *драконом Хартера-Хейтуэя*.

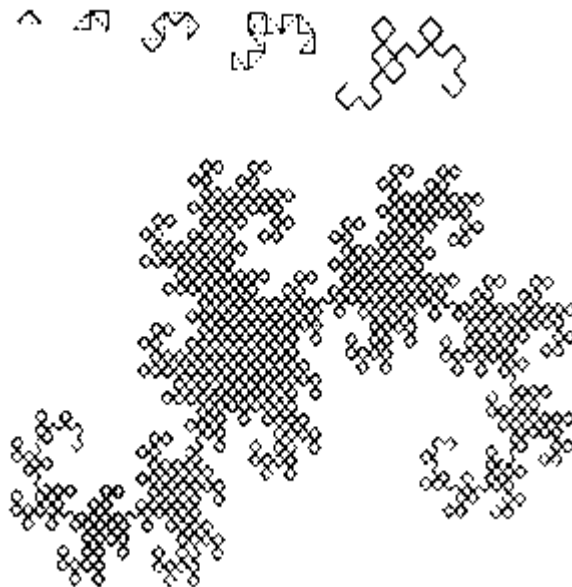


Рисунок 3.6 – Фрактал “Дракон Хартера-Хейтуэя”

Второе свойство фракталов - самоподобие. Возьмем, например, треугольник Серпинского (рисунок 3.4). Для его построения из центра равностороннего треугольника "вырежем" треугольник. Повторим эту же процедуру для трех образовавшихся треугольников (за исключением центрального) и так до бесконечности. Если мы теперь возьмем любой из образовавшихся треугольников и увеличим его - получим точную копию целого. В данном случае мы имеем дело с полным самоподобием.

Алгебраические фракталы

Вторая большая группа фракталов - алгебраические. Свое название они получили за то, что их строят, на основе алгебраических формул иногда весьма простых. Методов получения алгебраических фракталов несколько. Один из методов представляет собой многократный (итерационный) расчет функции $Z_{n+1}=f(Z_n)$, где Z - комплексное число, а f - некая функция. Расчет данной функции продолжается до выполнения определенного условия. И когда это условие выполнится - на экран выводится точка. При этом значения

функции для разных точек комплексной плоскости может иметь разное поведение:

- 1) с течением времени стремится к бесконечности;
- 2) стремится к 0;
- 3) принимает несколько фиксированных значений и не выходит за их пределы;
- 4) поведение хаотично, без каких-либо тенденций.

Чтобы проиллюстрировать алгебраические фракталы обратимся к классике - множеству Мандельброта, представленному на рисунке 3.7.

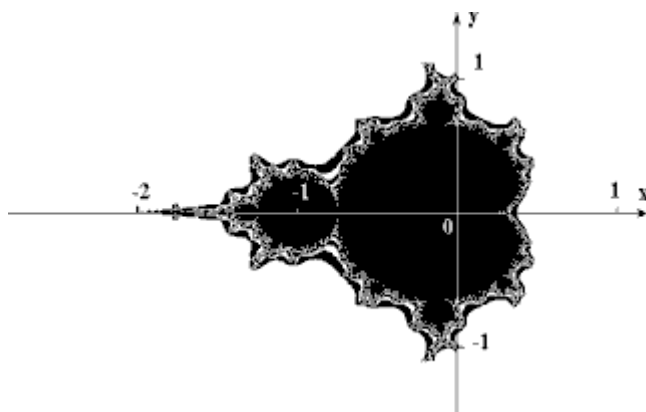


Рисунок 3.7 – Множество Мандельброта

Для его построения нам необходимы комплексные числа. Любой уважающий себя язык программирования включает в себя инструментарий для работы с комплексными числами.

Комплексное число - это число, состоящее из двух частей - действительной и мнимой, и обозначается оно $a+bi$. Действительная часть a это обычное число в нашем представлении, а вот мнимая часть bi интересней. i - называют мнимой единицей.

Комплексные числа можно складывать, вычитать, умножать, делить, возводить в степень и извлекать корень, нельзя только их сравнивать. Комплексное число можно изобразить как точку на плоскости, у которой

координата X это действительная часть a , а Y это коэффициент при мнимой части b .

Функционально множество Мандельброта определяется как $Z_{n+1}=Z_n*Z_n+C$. Программку можно описать словами. Для всех точек на комплексной плоскости в интервале от $-2+2i$ до $2+2i$ выполняем некоторое достаточно большое количество раз $Z_n=Z_0*Z_0+C$, каждый раз проверяя абсолютное значение Z_n . Если это значение больше 2, то рисуем точку с цветом равным номеру итерации на котором абсолютное значение превысило 2, иначе рисуем точку черного цвета. Все множество Мандельброта в полной красе у нас перед глазами [5].

Черный цвет в середине показывает, что в этих точках функция стремится к нулю - это и есть множество Мандельброта. За пределами этого множества функция стремится к бесконечности. А самое интересное это границы множества. Они то и являются фрактальными. На границах этого множества функция ведет себя непредсказуемо - хаотично.

Если на рисунке, изображающем множество Мандельброта увеличить небольшой участок до размеров всего экрана, то можно увидеть проявление самоподобности. Не точной самоподобности, но близкой и с ней мы будем сталкиваться постоянно, увеличивая части нашего фрактала больше и больше.

Системы итерируемых функций

Метод "Итераций системы уравнений" (Iterated Functions System - IFS) появился в середине 80-х годов как простое средство получения фрактальных структур.

IFS представляет собой систему функций из некоторого фиксированного класса функций, отображающих одно многомерное множество на другое. Наиболее простая IFS состоит из аффинных преобразований плоскости:

$$X' = A * X + B * Y + C, \quad (3.1)$$

$$Y' = D * X + E * Y + F. \quad (3.2)$$

В 1988 году известные американские специалисты в теории динамических систем и эргодической теории Барнсли и Слоан предложили некоторые идеи, основанные на соображениях теории динамических систем, для сжатия и хранения графической информации. Они назвали свой метод методом фрактального сжатия информации. Происхождение названия связано с тем, что геометрические образы, возникающие в этом методе, обычно имеют фрактальную природу в смысле Мандельброта.

На основании этих идей Барнсли и Слоан создали алгоритм, который, по их утверждению, позволит сжимать информацию в 500-1000 раз. Вкратце метод можно описать следующим образом. Изображение кодируется несколькими простыми преобразованиями (в нашем случае аффинными), то есть коэффициентами этих преобразований (в нашем случае A, B, C, D, E, F).

Например, закодировав какое-то изображение двумя аффинными преобразованиями, мы однозначно определяем его с помощью 12-ти коэффициентов. Если теперь задаться какой-либо начальной точкой (например, $X=0, Y=0$) и запустить итерационный процесс, то мы после первой итерации получим две точки, после второй - четыре, после третьей - восемь и так далее. Через несколько десятков итераций совокупность полученных точек будет описывать закодированное изображение. Но проблема состоит в том, что очень трудно найти коэффициенты IFS, которая кодировала бы произвольное изображение.

Для построения IFS применяют кроме аффинных и другие классы простых геометрических преобразований, которые задаются небольшим числом параметров. Например, проективные:

$$X' = (A1*X + B1*Y + C1) / (D1*X + E1*Y + F1), \quad (3.3)$$

$$Y' = (A2*X + B2*Y + C2) / (D2*X + E2*Y + F2), \quad (3.4)$$

или квадратичные:

$$X' = A1*X*X + B1*X*Y + C1*Y*Y + D1*X + E1*Y + F1, \quad (3.5)$$

$$Y' = A2*X*X + B2*X*Y + C2*Y*Y + D2*X + E2*Y + F2, \quad (3.6)$$

преобразования на плоскости.

В качестве примера использования IFS для построения фрактальных структур, рассмотрим кривую Коха (см. рисунок 3.5) и "дракона" Хартера-Хейтуэя (рисунок 3.6). Выделим в этих структурах подобные части и, для каждой из них вычислим коэффициенты аффинного преобразования. В аффинный коллаж будет включено столько аффинных преобразований, сколько существует частей подобных целому изображению.

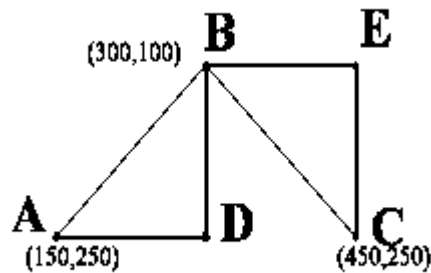


Рисунок 3.7 – Заготовка для построения IFS фрактала “Дракон Хартера-Хейтуэя”

Построим IFS для "дракона" Хартера-Хейтуэя. Для этого расположим первое поколение этого фрактала на сетке координат дисплея 640 x 350 (Рис.3.7). Обозначим точки получившейся ломаной **A**, **B**, **C**. По правилам построения у этого фрактала две части, подобные целому - на рис.3.7 это

ломаные **ADB** и **BEC**. Зная координаты концов этих отрезков, можно вычислить коэффициенты двух аффинных преобразований, переводящих ломаную **ABC** в **ADB** и **BEC**:

$$X' = -0.5*X - 0.5*Y + 490, \quad (3.7)$$

$$Y' = 0.5*X - 0.5*Y + 120, \quad (3.8)$$

$$X' = 0.5*X - 0.5*Y + 340, \quad (3.9)$$

$$Y' = 0.5*X + 0.5*Y - 110, \quad (3.10)$$

Задавшись начальной стартовой точкой (например $X=0$ $Y=0$) и итерационно действуя на нее этой IFS, после десятой итерации на экране получим фрактальную структуру, изображенную на рис.3.8, которая представляет собой "дракон" Хартера-Хейтуэя. Его кодом (сжатым описанием) является набор коэффициентов двух аффинных преобразований.

SHAPE * MERGEFORMAT



Рисунок 3.8 – "Дракон" Хартера-Хейтуэя, построенный с помощью IFS в прямоугольнике 640x350

Аналогично можно построить IFS для кривой Коха. Нетрудно увидеть, что эта кривая имеет четыре части, подобные целой кривой. Для нахождения IFS опять расположим первое поколение этого фрактала на сетке координат дисплея 640 x 350 (рисунок 3.9).

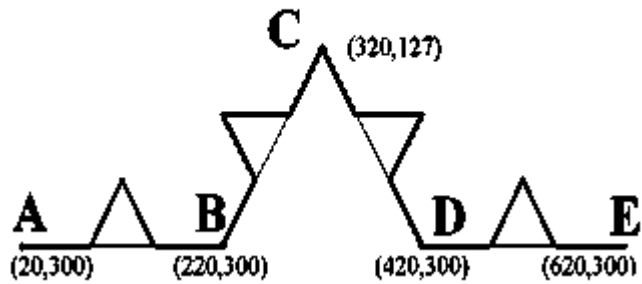


Рисунок 3.9 – Заготовка для построения IFS кривой Коха

Для ее построения требуется набор аффинных преобразований, состоящий из четырех преобразований:

$$X' = 0.333 * X + 13.333, \quad (3.11)$$

$$Y' = 0.333 * Y + 200, \quad (3.12)$$

$$X' = 0.333 * X + 413.333, \quad (3.13)$$

$$Y' = 0.333 * Y + 200, \quad (3.14)$$

$$X' = 0.167 * X + 0.289 * Y + 130, \quad (3.15)$$

$$Y' = -0.289 * X + 0.167 * Y + 256, \quad (3.16)$$

$$X' = 0.167 * X - 0.289 * Y + 403, \quad (3.17)$$

$$Y' = 0.289 * X + 0.167 * Y + 71. \quad (3.18)$$

Результат применения этого аффинного коллажа после десятой итерации можно увидеть на рисунке 3.10.



640x350

Рисунок 3.10 –
Кривая Кох,
построенная с
помощью IFS в
прямоугольнике

Использование IFS для сжатия обычных изображений (например, фотографий) основано на выявлении локального самоподобия, в отличие от фракталов, где наблюдается глобальное самоподобие и нахождение IFS не слишком сложно. По алгоритму Барнсли происходит выделение в изображении пар областей, меньшая из которых подобна большей, и сохранение нескольких коэффициентов, кодирующих преобразование, переводящее большую область в меньшую. Требуется, чтобы множество "меньших" областей покрывало все изображение. При этом в файл, кодирующий изображения будут записаны не только коэффициенты, характеризующие найденные преобразования, но и местоположение и линейные размеры "больших" областей, которые вместе с коэффициентами будут описывать локальное самоподобие кодируемого изображения. Восстанавливающий алгоритм, в этом случае, должен применять каждое преобразование не ко всему множеству точек, получившихся на предыдущем шаге алгоритма, а к некоторому их подмножеству, принадлежащему области, соответствующей применяемому преобразованию.

При аффинных преобразованиях исходное изображение меняет масштаб, параллельно переносится вдоль каждой из осей и вращается на некоторый угол.

В результате можно получить потрясающие коэффициенты сжатия. Например, рисунок папоротника кодируется с помощью 28 цифр и один и тот же рисунок получается в не зависимости от того, что взяли за основу - прямоугольник, круг, треугольник или что-либо еще. Но, к сожалению процесс создания набора коэффициентов для произвольного изображения очень трудоемок и занимает очень много времени.

В третьей главе дается математическое описание понятия фрактала. Показано, что фракталы обладают дробной размерностью. Указаны основные типы фракталов: геометрические, алгебраические и системы итерируемых функций. Особый интерес при моделировании структуры кристаллов льда

представляют системы итерируемых функций, которые являются уравнениями аффинных геометрических преобразований. Значения коэффициентов преобразований однозначно определяют структуру фрактала.

4 Моделирование размеров и структуры кристаллов льда

4.1 Численное моделирование эволюции во времени размеров кристаллов льда

В ходе выполнения дипломного проекта было осуществлено численное моделирование эволюции во времени геометрических размеров кристаллов льда в течение 100 с при различных атмосферных условиях.

Для расчета радиуса кристалла льда был использован следующий математический аппарат.

Скорость сублимационного роста кристаллов льда определялась по формуле Максвелла:

$$\frac{dr_{\text{л}}}{d\tau} = \frac{D_{\text{n}} \cdot (e - E_{\text{nl}})}{R_{\text{n}} \cdot T \cdot \rho_{\text{л}} \cdot r_{\text{л}}}, \quad (4.1)$$

где $r_{\text{л}}$ – радиус кристалла льда, м;
 $E_{\text{л},r,m}$ – давление насыщения водяного пара над поверхностью льда при температуре T , радиусе кристалла льда $r_{\text{л}}$, Па;
 $\rho_{\text{л}}$ – плотность льда, равная $(956.5756109 - 0.144886 \cdot T)$ кг/м³.
 τ – время, с;

D_{II} – коэффициент молекулярной диффузии водяного пара в воздухе, определяемый выражением

$$\left(-1.89725 \cdot 10^{-5} + 1.5 \cdot 10^{-7} \cdot T\right) \cdot \frac{101326}{P}, \text{ м}^2/\text{с};$$

P – атмосферное давление, Па;

e – парциальное давление водяного пара, Па;

$E_{пв}(T)$ – давление насыщения водяного пара над поверхностью воды при температуре T , радиусе капли r_B , Па;

Давление насыщения водяного пара над поверхностью воды и над поверхностью льда рассчитывалось по формулам Магнуса:

$$E_{пв}(T) = E_0 \cdot 10^{\frac{8.61503 \cdot (T - 273.15)}{T}}, \quad (4.2)$$

$$E_{пл}(T) = E_0 \cdot 10^{\frac{9.76421 \cdot (T - 273.15)}{T}}, \quad (4.3)$$

где $E_{пв}(T)$ – давление насыщения над плоской поверхностью воды при температуре T , Па;

$E_{пл}(T)$ – давление насыщения над плоской поверхностью льда при температуре T , Па;

E_0 – давление насыщения над поверхностью воды или льда при температуре 273.15 К, равное 610.78 Па;

T – температура воздуха, К.

Для определения изменения размера кристалла льда с течением времени был использован численный метод интегрирования уравнения Максвелла, метод прямоугольников:

$$r_{(i)} = r_{(i-1)} + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)_{(i-1)} \cdot \Delta\tau, \quad (4.4)$$

где r – радиус частицы, м;
 i – порядковый номер шага;
 $\Delta\tau$ – интервал времени (шаг по времени), с.

Значение момента времени, соответствующее i -му шагу определяется выражением:

$$\tau_{(i)} = \tau_{(i-1)} + \Delta\tau, \quad (4.5)$$

где τ – время, с.

Для определения степени влияния температуры воздуха на размеры кристаллов льда были осуществлены расчеты эволюции размеров частиц со временем при температуре -23 °С и относительной влажности воздуха 100%, 90%, 80% и 70%.

Результаты проведенного численного моделирования представлены в таблице 4.1 и рисунке 4.1.

Таблица 4.1 – Результаты расчетов радиуса кристалла льда при $t = -23$ °C и $S=100, 90, 80, 70\%$

τ, c	$r_{л}, м$ (при $S=100\%$)	$r_{л}, м$ (при $S=90\%$)	$r_{л}, м$ (при $S=80\%$)	$r_{л}, м$ (при $S=70\%$)
0	5,00E-06	5,00E-06	5,00E-06	5,00E-06
1	6,50E-06	5,81E-06	5,12E-06	4,43E-06
2	7,65E-06	6,50E-06	5,24E-06	3,79E-06
3	8,63E-06	7,13E-06	5,35E-06	3,04E-06
4	9,50E-06	7,69E-06	5,46E-06	2,10E-06
5	1,03E-05	8,22E-06	5,57E-06	7,40E-07
6	1,10E-05	8,71E-06	5,68E-06	0,00E+00
7	1,17E-05	9,17E-06	5,78E-06	0,00E+00
8	1,23E-05	9,61E-06	5,89E-06	0,00E+00
9	1,29E-05	1,00E-05	5,99E-06	0,00E+00
10	1,35E-05	1,04E-05	6,09E-06	0,00E+00
20	1,83E-05	1,38E-05	7,00E-06	0,00E+00
30	2,20E-05	1,65E-05	7,81E-06	0,00E+00
40	2,52E-05	1,88E-05	8,55E-06	0,00E+00
50	2,81E-05	2,09E-05	9,22E-06	0,00E+00
60	3,06E-05	2,27E-05	9,85E-06	0,00E+00
70	3,30E-05	2,44E-05	1,04E-05	0,00E+00
80	3,52E-05	2,60E-05	1,10E-05	0,00E+00
90	3,73E-05	2,76E-05	1,15E-05	0,00E+00
100	3,90E-05	2,89E-05	1,20E-05	0,00E+00

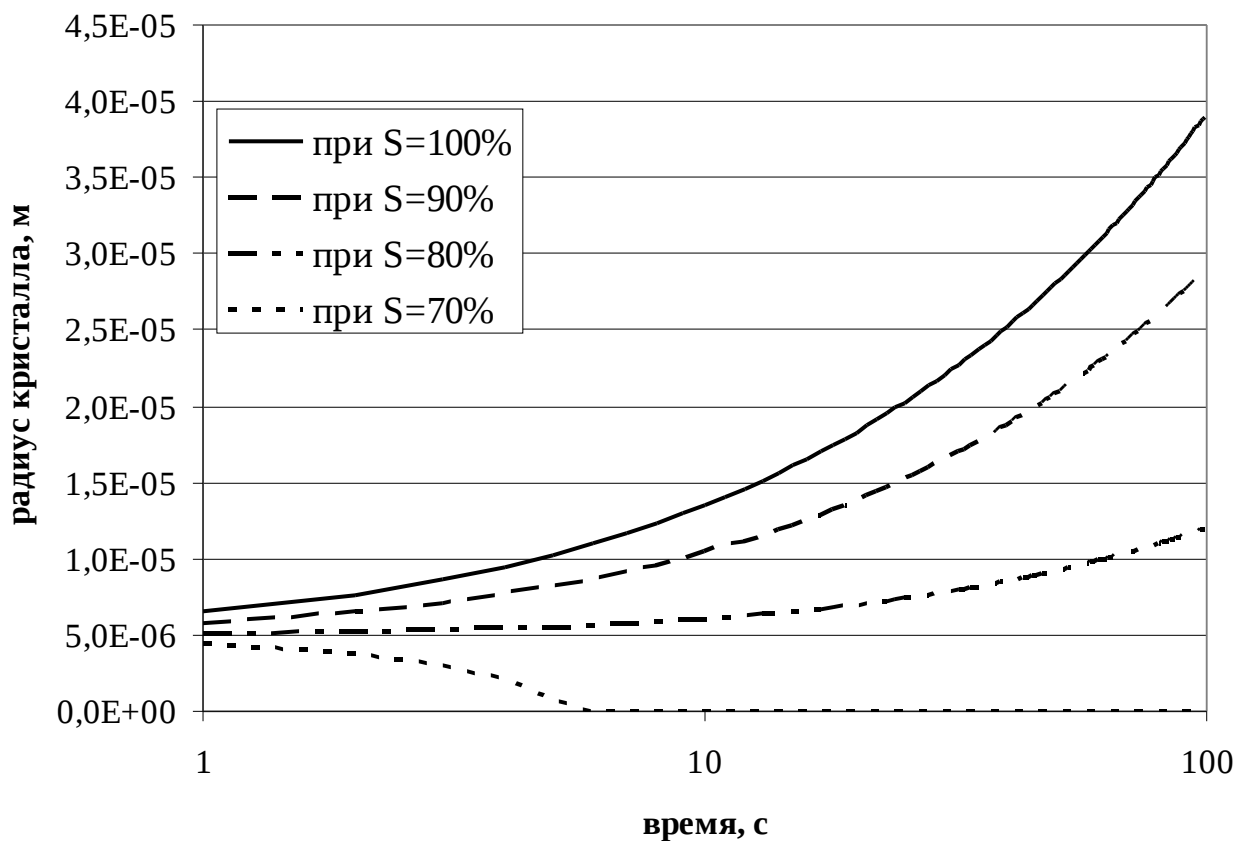


Рисунок 4.1 – Зависимость радиуса кристалла льда от времени, при $t=-23\text{ }^{\circ}\text{C}$ и $S=100, 90, 80$ и 70%

Из рисунка 4.1 видно, что при относительной влажности 100% кристалл растет быстрее. Это объясняется тем, что с увеличением влажности воздуха увеличивается поток присоединяющихся молекул к поверхности кристалла. А при влажности воздуха 70% , когда выполняется условие $e < E_{nl}$, кристалл льда быстро испаряется, поскольку диффузионный поток молекул направлен от поверхности кристалла в окружающую среду.

Для определения степени влияния относительной влажности воздуха на размеры кристаллов льда были осуществлены расчеты эволюции размеров частиц со временем в насыщенном воздухе при температурах -23, -12 и -2 °С. Результаты проведенного численного моделирования представлены в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Результаты расчета радиуса кристалла льда при S=100% и t=-23, -12 и -2 °С.

τ , с	$r_{л}$, м (при $t=-23$ °С)	$r_{л}$, м (при $t=-12$ °С)	$r_{л}$, (при $t=-2$ °С)
0	5,00E-06	5.00E-06	5,00E-06
1	6,00E-06	7,08E-06	5,83E-06
2	7,65E-06	8,55E-06	6,54E-06
3	8,63E-06	9,76E-06	7,18E-06
4	9,50E-06	1,08E-05	7,76E-06
5	1,03E-05	1,18E-05	8,29E-06
6	1,10E-05	1,27E-05	8,79E-06
7	1,17E-05	1,35E-05	9,27E-06
8	1,23E-05	1,43E-05	9,72E-06
9	1,29E-05	1,50E-05	1,01E-05
10	1,35E-05	1,57E-05	1,06E-05
20	1,83E-05	2,14E-05	1,40E-05
30	2,20E-05	2,58E-05	1,67E-05
40	2,52E-05	2,96E-05	1,91E-05
50	2,81E-05	3,30E-05	2,11E-05
60	3,06E-05	3,60E-05	2,30E-05
70	3,30E-05	3,88E-05	2,48E-05
80	3,52E-05	4,14E-05	2,64E-05
90	3,73E-05	4,38E-05	2,79E-05
100	3,90E-05	4,59E-05	2,92E-05

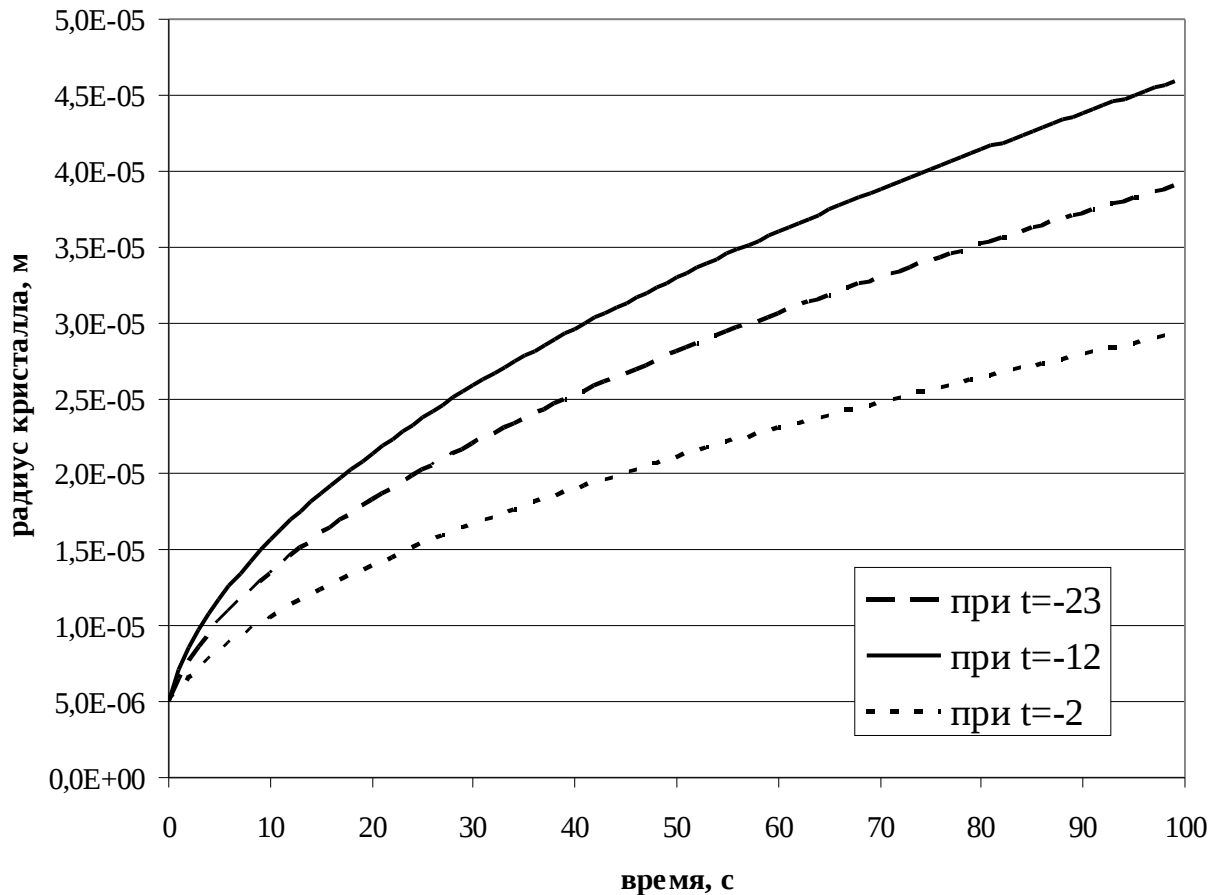


Рисунок 4.2 – Зависимость радиуса кристалла льда от времени, при $S=100\%$ и $t=-23, -12$ и -2 °C

В насыщенном воздухе ($S=100\%$), парциальное давление водяного пара равняется давлению насыщения над поверхностью воды по определению. Скорость диффузионного роста кристалла определяется разницей давлений насыщения над поверхностью воды и льда, которая достигает максимального значения при температуре воздуха -12 °C. Из рисунка 4.2 как раз видно, что при температуре -12 °C кристаллы льда растут быстрее. С понижением и повышении температуры относительно -12 °C, кристаллы льда растут медленнее.

4.2 Моделирование структуры кристаллов льда

Для моделирования структуры кристаллов льда была разработана и реализована численная модель построения фракталов со структурой, аналогичной структуре кристаллов льда.

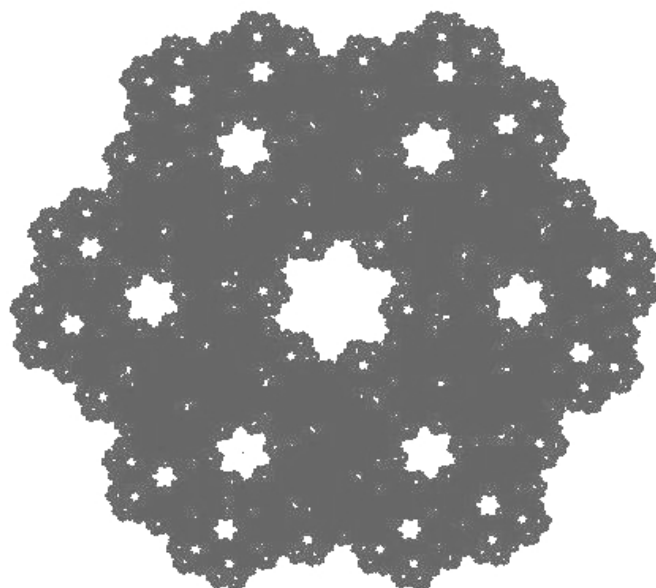


Рисунок 4.3 – Результат моделирования №1

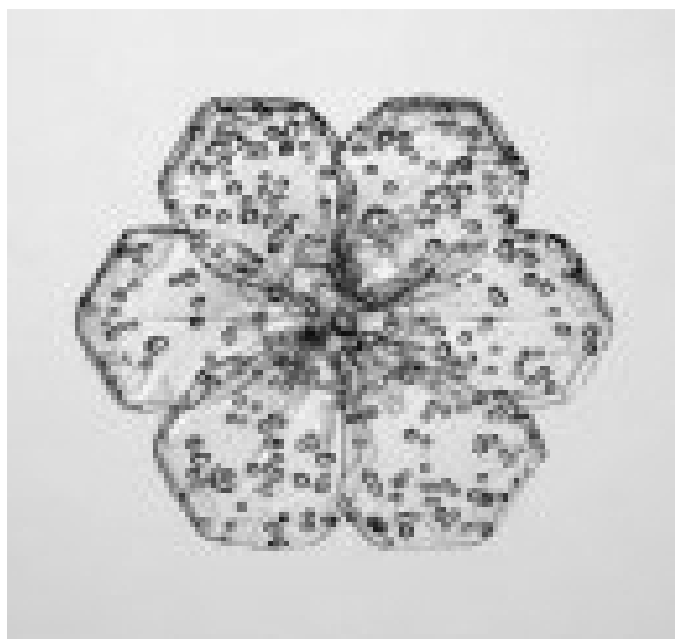


Рисунок 4.4 – Изображение кристалла льда (P1b)

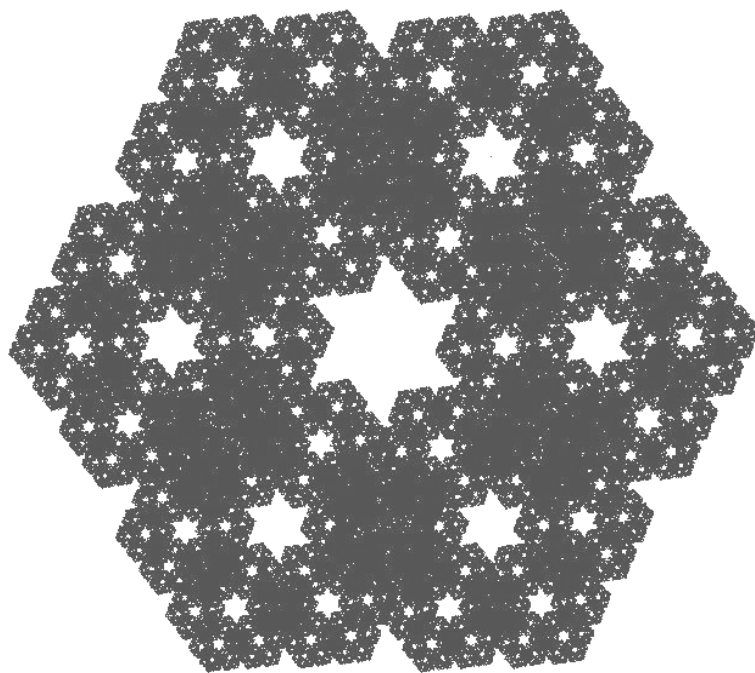


Рисунок 4.5 – Результат моделирования №2



Рисунок 4.6 – Изображение кристалла льда (P1c)

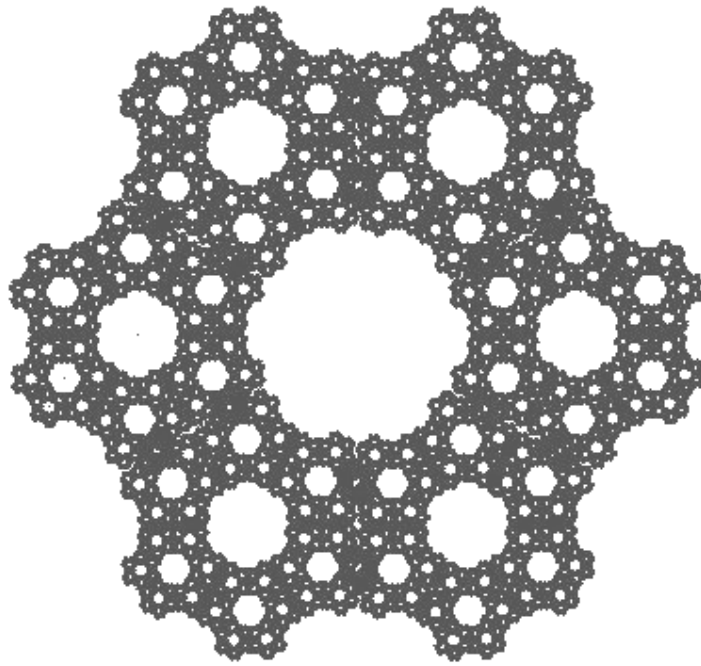


Рисунок 4.7 – Результат моделирования №3



Результат 4.8 – Изображение кристалл льда (P1c)

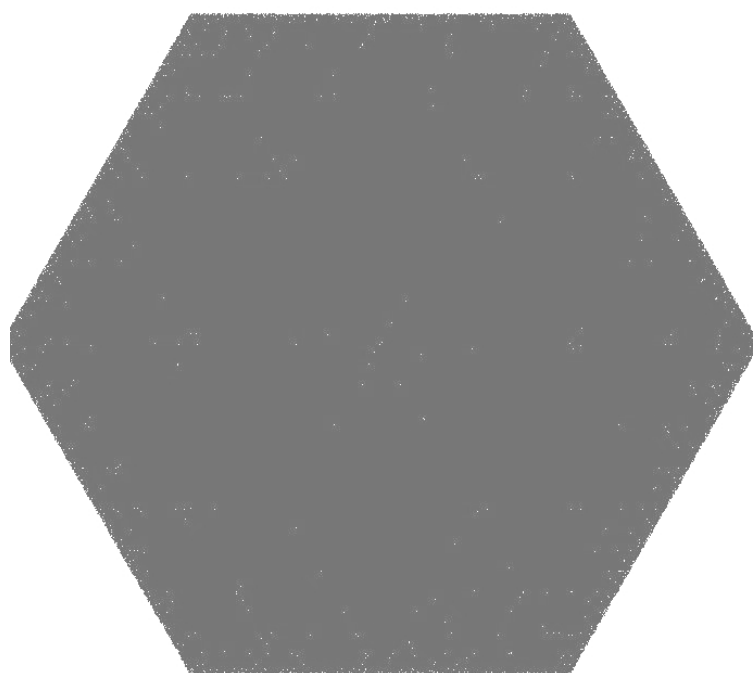


Рисунок 4.9 – Результат моделирования №4

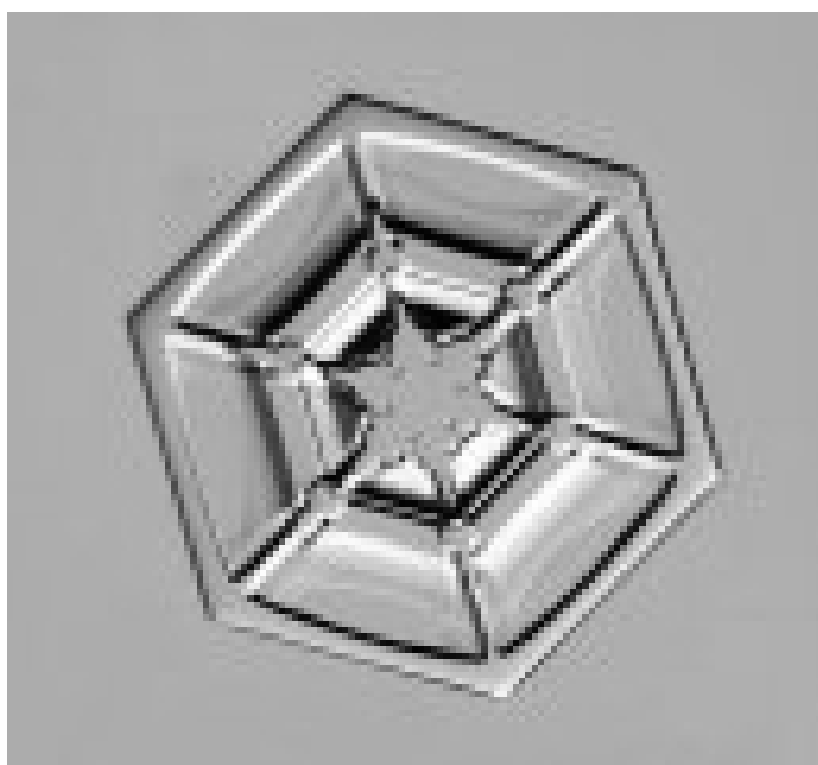


Рисунок 4.10 – Изображение кристалла льда (P1a)

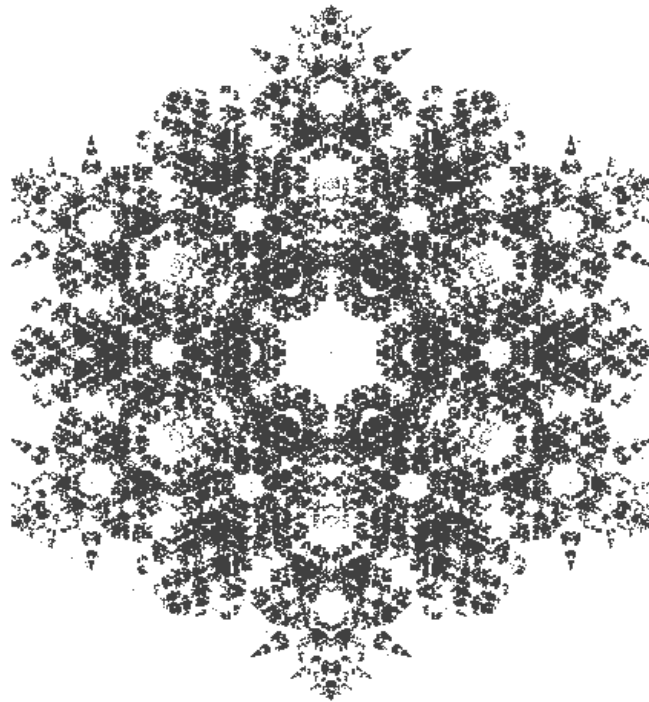


Рисунок 4.11 – Результат моделирования №5



Рисунок 4.12 – Изображение кристалла льда (P1e)

Таблица 4.3 – Параметры модели кристаллов льда

Номер фрактала	Номер аффинного преобразования	a	b	c	d	e	f
1	1	0.4333	-0.2	0.2	0.4333	0.5	0.87
	2	0.4333	-0.2	0.2	0.4333	1.0	0.0
	3	0.4333	-0.2	0.2	0.4333	0.1	-0.87
	4	0.4333	-0.2	0.2	0.4333	-0.5	-0.87
	5	0.4333	-0.2	0.2	0.4333	-1.0	0.0
	6	0.4333	-0.2	0.2	0.4333	-0.5	0.87
2	1	0.4333	-0.02	0.02	0.4333	0.5	0.87
	2	0.4333	-0.02	0.02	0.4333	1.0	0.0
	3	0.4333	-0.02	0.02	0.4333	0.1	-0.87
	4	0.4333	-0.02	0.02	0.4333	-0.5	-0.87
	5	0.4333	-0.02	0.02	0.4333	-1.0	0.0
	6	0.4333	-0.02	0.02	0.4333	-0.5	0.87
3	1	0.333	-0.2	0.2	0.333	0.5	0.87
	2	0.333	-0.2	0.2	0.333	1.0	0.0
	3	0.333	-0.2	0.2	0.333	0.1	-0.87
	4	0.333	-0.2	0.2	0.333	-0.5	-0.87
	5	0.333	-0.2	0.2	0.333	-1.0	0.0
	6	0.333	-0.2	0.2	0.333	-0.5	0.87
4	1	0.5	0.0	0.0	0.5	0.5	0.87
	2	0.5	0.0	0.0	0.5	1.0	0.0
	3	0.5	0.0	0.0	0.5	0.1	-0.87
	4	0.5	0.0	0.0	0.5	-0.5	-0.87
	5	0.5	0.0	0.0	0.5	-1.0	0.0
	6	0.5	0.0	0.0	0.5	-0.5	0.87
5	1	0.37	-0.03	0.03	0.37	0.5	0.87
	2	0.37	-0.03	0.03	0.37	1.0	0.0
	3	0.37	-0.03	0.03	0.37	0.1	-0.87
	4	0.37	-0.03	0.03	0.37	-0.5	-0.87
	5	0.37	-0.03	0.03	0.37	-1.0	0.0
	6	0.37	-0.03	0.03	0.37	-0.5	0.87

Из четвертой главы можно сделать выводы, что при относительной влажности 100% кристалл растет быстрее. Это объясняется тем, что с увеличением влажности воздуха увеличивается поток присоединяющихся молекул к поверхности кристалла. А при влажности воздуха 70%, когда выполняется условие $e < E_m$, кристалл льда быстро испаряется, поскольку диффузионный поток молекул направлен от поверхности кристалла в окружающую среду.

В насыщенном воздухе ($S=100\%$), парциальное давление водяного пара равняется давлению насыщения над поверхностью воды по определению. Скорость диффузионного роста кристалла определяется разницей давлений насыщения над поверхностью воды и льда, которая достигает максимального значения при температуре воздуха $-12\text{ }^\circ\text{C}$. По результатам численного моделирования как раз видно, что при температуре $-12\text{ }^\circ\text{C}$ кристаллы льда растут быстрее. С понижением и повышением температуры относительно $-12\text{ }^\circ\text{C}$, кристаллы льда растут медленнее.

Из полученных фрактальных изображений видно, что используя аффинные преобразования можно построить изображения со структурой подобной кристаллам льда.

Заключение

В процессе работы над дипломным проектом были получены следующие результаты:

- изучена классификация кристаллов льда и показано, что не существует единой классификации, описывающей всё многообразие форм кристаллов. Это объясняется различием в выборе признаков классификации, в зависимости от решаемых задач;
- рассмотрены условия формирования кристаллов льда в облаках и влияние метеопараметров атмосферы на форму кристаллов. Можно сказать, что на формирование кристаллов льда особое влияние оказывают температурно-влажностные характеристики. Если рассматривать кристалл на молекулярном уровне, то можно сказать, что кристалл льда содержит в себе значительное количество молекул с изотопами кислорода ^{18}O и атомами дейтерия. Это определяет разнообразие структуры кристаллов при одних и тех же внешних атмосферных условиях;
- изучены методы фрактальной геометрии и выбран метод аффинных преобразований, при помощи которого возможно моделирование структуры кристаллов льда. Особый интерес при моделировании структуры кристаллов льда представляют системы итерируемых функций, которые являются уравнениями аффинных геометрических преобразований. Значения коэффициентов преобразований однозначно определяют структуру фрактала;
- произведено численное моделирование размеров кристаллов льда и установлено, что при увеличении относительной влажности воздуха увеличивается скорость сублимационного роста кристаллов льда.

Наибольшая скорость роста наблюдается при температурах около $-15\text{ }^{\circ}\text{C}$;

- осуществлено численное моделирование фрактальных структур кристаллов льда.

Подводя итог, можно утверждать, что форма кристаллов льда полностью зависит от температуры и влажности. А особенности молекулярного строения определяют структуру кристаллов льда. В природе не существует двух одинаковых снежинок.

В качестве целей дальнейших исследований можно указать на необходимость осуществления поиска связи коэффициентов аффинных преобразований с параметрами состояния атмосферы.

Список литературы

- 1 Снег. Справочник [Текст] / Под ред. Д. М. Грея, Д. Х. Мейла.– Л.:Гидрометеоиздат, 1986. – 751с.
- 2 Литвинов И. В. Структура атмосферных осадков [Текст]. – Л.:Гидрометеоиздат, 1974. – 153с.
- 3 Мейсон Б. Дж Физика облаков [Текст] . – Л.: Гидрометеоиздат, 1961. – 542с.
- 4 Довгалюк Ю. А. , Першина Т. А. Атлас снежинок [Текст]. – СПб.:Гидрометеоиздат, 2005. – 140с.
- 5 Саква Д. Ю. Фракталы вокруг нас [Электронный ресурс] / Д. Ю. Саква // Интернет портал. – 2008. – <http://sakva.narod.ru/fractalsframe.htm>
- 6 Краткая хронология наблюдений за снежными кристаллами [Электронный ресурс] // Интернет портал. – 2008 – <http://chemfiles.narod.ru/meteo/snow/snow1.html>